

ВЫПУСК



Библиотечка КВАНТ

А. В. Спивак

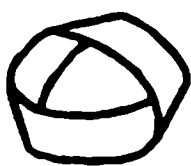


МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

Б Ю Р О



КВАНТУМ



БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ
В Ы П У С К

88

А.В.Спивак

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК



УДК 51 (02.062)
ББК 22.1
С72

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А.А.Болибрух, Б.М.Болотовский, А.А.Варламов,
В.Л.Гинзбург, Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов,
С.С.Кротов (заместитель председателя), С.П.Новиков,
Ю.А.Осипьян (председатель), В.В.Произволов,
Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,
А.Р.Хохлов, А.И.Черноуцан (ученый секретарь)

Научный редактор выпуска В.М.Тихомиров

С72 Спивак А.В.

Математический праздник. — М.: Бюро Квантум, 2004.
— 288 с. — (Библиотечка «Квант». Вып. 88)
ISBN 5-85843-035-X

В книге широко представлены задачи по математике, предлагавшиеся на занятиях математических кружков и олимпиадах. Основное ее содержание — классические, проверенные временем арифметические задачи, которые учат правильно рассуждать и считать. Кроме них, есть геометрические задачи, требующие фантазии и изобретательности, и просто забавные задачи-шутки.

Книга предназначена для учащихся 5–8 классов, но будет интересна и полезна как более старшим, так и более младшим школьникам, а также учителям и родителям.

ББК 22.1

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

Однажды – это было в 1994 году – я получил приглашение принять участие в конференции, которая должна была проходить в городе Аахене (Германия) в марте следующего года. Название конференции несколько меня обескуражило: «1200 лет цивилизации и науки в Европе». Я пробовал узнать у разных людей, что же произошло в Европе в 795 году, что послужило тем зерном, из которого произросли на нашем континенте цивилизация и наука. Но никто не мог дать мне вразумительного ответа. Вопрос разрешился на самой конференции.

...В восьмом веке была образована гигантская империя, охватывавшая большую часть современной Европы. Во главе ее стоял король Carolus Magnus – Карл Великий. Он был не только завоеватель, но и реформатор. В конце восьмого века Карл Великий избрал столицей своей империи Аахен и повелел организовать в этом городе гимназию. Для этого он призвал англосаксонского ученого, главу кафедральной школы в Йорке Флакка Алкуина. И Алкуин действительно организовал первую в Европе гимназию и создал первое «учебное пособие» – «Задачник для изощрения ума юношей» (Propositiones ad Acuendos Juvenes). В той книге было 52 задачи. Под номером 18 значилась следующая: «Человек должен перевезти волка, козу и кочан капусты через реку ... » Трудно предположить, что кто-то из читателей не знает продолжения; а если он действительно этого не знает, то может посмотреть задачу №18 предлагаемого сборника. Так вот что оказалось тем зерном, из которого за 1200 лет выросли великая цивилизация и грандиозное здание науки! За эти годы появилось несметное множество книг, благородной целью которых было «изощрение ума юношей». Одну из таких книг читатель держит в своих руках.

Автор этой книги – Александр Васильевич Спивак – энтузиаст математического просвещения, имеющий большой и драгоценный опыт в этой области. Его вдохновляет то же самое, что и основоположника нашей научной цивилизации Флакка Алкуина, – способствовать развитию ума, доставлять радость от преодоления интеллектуальных препятствий. Название книги представляется мне очень удачным: «Математический праздник». С большим удовольствием приглашаю вас принять участие в этом празднике.

Профессор МГУ В.М.Тихомиров

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Первое открытие всегда заключается в том, т.е. вещи, которые стоит открывать.

Д.Томсон

Математика – один из главных школьных предметов. Но нередко от родителей и учеников можно услышать: «Надо уменьшить нагрузку, в нашей семье гуманитарный склад ума, а математика – и недоступна, и никому не нужна».

Плоха не математика, а бессмысленная зубрежка. Цель обучения – не заучивание неведь откуда взятых правил, а развитие интеллекта. Нормальный здоровый ребенок (не вундеркинд, а нормальный ребенок) может невероятно много.* Всякому хочется радости творчества, самостоятельных (желательно – совместных с родителями или учителями) размышлений. Эта книжка как раз дает возможность думать. Большая часть ее задач требует не долгих вычислений, а ясного взгляда, сосредоточенности. Но учтите – есть и очень трудные задачи. Иной раз потребуются длительные напряженные размышления для того, чтобы найти решение «в одну строчку».

Книга рассчитана на школьников 5–8 классов. А правильнее сказать – на начинающих: тех, кого необходимо научить азам арифметики и геометрии. По замыслу, первые 500 задач хорошо бы прорешать к концу шестого или середине седьмого класса, а следующие 500 – к концу седьмого или середине восьмого. Но это, конечно, весьма условно: кто-то сможет и за один год решить целую тысячу задач, кто-то еле справится с двумя сотнями.

Осуществить отбор задач помогло то, что я (с 1984 года) каждую субботу, с начала октября и до начала мая, вел математический кружок при МГУ (так называемый Малый мехмат). А еще – огромное количество кружков и уроков в московских школах: 1101, 1543, 1018, 22, 45, 2, 1106, всех не перечесть. Эта книга – что-то вроде конспекта этих моих занятий.

Конечно, на ней не могли не отразиться мои личные вкусы и пристрастия. Но я стремился не к новизне, а к охвату наиболее важных и доступных для начинающего тем и методов. Ведь интересных задач очень много, гораздо больше тысячи. И я старался отобрать такие задачи, без которых никак не обойтись, которые кочуют по сборникам «занимательных», «олимпиадных» задач, составляют содержание работы всевозможных кружков, математических классов, заочных школ, да и в школьные учебники попадают (и составляют самую главную их часть, не подверженную влиянию моды или очередной реформы).

* И быстро теряет изначальную гениальность, если взрослые, ленись, не ценят и не развивают его ум, не желают или не умеют заставить его учиться.

Эта книга не появилась бы без многих столетий работы математиков – Евклида, Архимеда, Эйлера, Ньютона, вклад которых в эту книгу невозможно переоценить. Да и наши современники – организаторы олимпиад, руководители математических кружков, авторы статей и задач для школьников – внесли в нее свой вклад. Практически все задачи этой книги можно найти в журнале «Квант» и других источниках. Цель этого сборника – избавить многих и многих учителей и школьников от необходимости рыться в разнообразных статьях и книгах, подбирая задачи на ту или иную тему.

В отличие от сборников, в которых или ко всем задачам даны ответы, или же ко всем – полные решения, применен смешанный подход: часть задач снабжена очень подробными решениями, часть – краткими указаниями, часть – только ответами, а довольно значительная часть вообще дана без ответов и указаний. Благодаря этому, с одной стороны, ученик может самостоятельно изучать материал, поскольку самые главные идеи разобраны, а с другой стороны, учитель может использовать книгу, не боясь, что ученики все спишут с ответов.

Основу книги составили два приложения к журналу «Квант» (номера 2 и 4 за 2000 год). Главы «Парадоксы и софизмы», «Арбузная пошлина», «Сезам, откройся!» и «Логично, не правда ли?» – это чуть переделанные статьи, соответственно, С.Л.Табачникова «У попа была собака...» («Квант», №6 за 1989 год), А.Ю.Котовой «Арбузная пошлина» («Квант», №1 за 2000 год) и «Сезам, откройся!» («Квант», №5 за 2000 год) и И.Г.Григорьевой «Разумно или логично?» («Квант», №3 за 1998 год).

Особой благодарности заслуживает М.И.Ахмеджанова, которая чрезвычайно внимательно прочитала книгу, высказала ряд предложений по ее улучшению и исправила довольно много опечаток.

Как решать задачи?

В решении любой задачи есть крупица открытия. Задача может быть сколь угодно скромной, но если она заставила быть изобретательным и если вы решили ее самостоятельно, то радость победы – пусть даже о ней никто, кроме вас, не узнает – должна быть ОГРОМНОЙ. Вспомните легенду о выскочившем из ванны Архимеде!

Если же задача не получилась и пришлось читать чужое решение*, обязательно возникнет вопрос: «Как можно было до этого догадаться?» Ответ прост – нельзя научиться плавать, не войдя в воду. И, честно говоря, пишу я все это не для того, чтобы дать волшебный ключик**.

* Без этого не обойтись. Математика развивается уже несколько тысячелетий – даже если вы столь же талантливы и упорны, как великие предшественники, жизнь слишком коротка. Спасает нас только то, что, как сказал великий математик и физик Исаак Ньютон, мы стоим на плечах гигантов, можем использовать их достижения.

** И нет никакого волшебного ключика, никаких сверхъестественных «математических способностей», никаких сверхбыстрых методик, позволяющих без труда овладеть наукой!

Просто какие-то задачи могли не получиться и могла возникнуть «идея»: «Не бросить ли эту противную * книгу и не взять ли что-нибудь попроще? А может быть, я – самый глупый человек в мире, и именно я никогда не смогу научиться их решать?» Нет, учиться надо не тому, что легко получается. Ценно высшее напряжение сил. Урок математики должен быть чем-то вроде «операции на мозге», создающей «новые извилины». Может быть, вас утешат и придадут силы мысли мудрецов?

- Способность к восприятию математики распространена в человечестве, пожалуй, даже в большей степени, чем способность получать удовольствие от приятной мелодии, она присуща огромному большинству. *Г.Харди*
- Умение решать задачи – такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать. Ему можно научиться только путем подражания или упражнения. *Д.Поля*
- Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память и непонятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчетливо, но пассивно. *Д.Юнг*
- Математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было прийти к ним самостоятельно. *А.Колмогоров*
- Если бы мне пришлось начать вновь свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику, как науку, требующую точности и принимающую за верное только то, что вытекает как следствие из доказанного. *Г.Галилей*
- Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой науки и даже не может обнаружить своего невежества, а потому не ищет от него лекарства. *Р.Бэкон*.

Обозначения и советы читателю

Номер задачи (пункта) выделен курсивом, если в конце книги дан ответ или указание, и выделен жирным шрифтом, если дано подробное решение.

Некоторые задачи имеют один и тот же номер (например, задачи 4 и 4'). Так сделано, когда по сути это – варианты одной и той же задачи.

Вряд ли необходимо решать абсолютно все задачи подряд: напротив, некоторые трудные задачи лучше пропустить, чтобы поразмыслить над ними на досуге и вернуться к ним спустя несколько недель или месяцев.

Задачи, которые можно пропустить при первом чтении, напечатаны мелким шрифтом.

Звездочкой помечены задачи, которые кажутся мне более трудными. (Впрочем, у каждого человека свои понятия о том, что трудно, а что легко.)

А.В.Спивак

* Многим людям свойственно винить других в своих ошибках и искать ложные обходные пути вместо того, чтобы мужественно идти по прямой к цели.

АРИФМЕТИКА И НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Да, что знаешь в детстве –
знаешь на всю жизнь, но и:
чего не знаешь в детстве –
не знаешь на всю жизнь.*

М.Цветаева

1. «Метод Прокруста»

Отрезать лишнее или добавить недостающее – вот прием, полезный для решения следующих задач.

1. Двое поделили между собой 7 рублей, причем один получил на 3 рубля больше другого. Сколько кому досталось?

2. Два карандаша и ластик стоят столько же, сколько один карандаш и четыре ластика. Во сколько раз карандаш дороже ластика?

3. На двух полках 27 книг (рис.1). На одной из них на 3 книги больше, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?

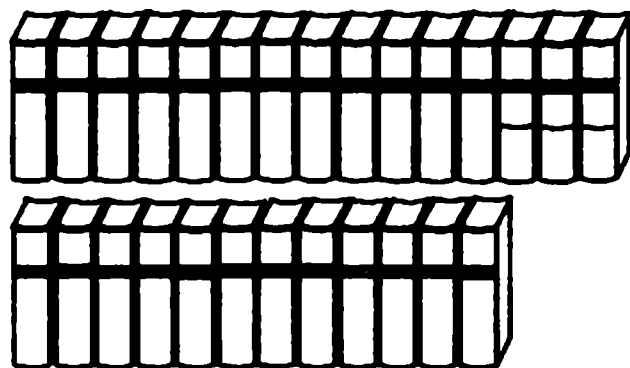


Рис.1

4. Сумма двух чисел равна 1106. Одно из них больше другого на 22. Найдите эти числа.

4'. Сумма двух чисел равна 1018. Одно из них меньше другого на 2. Найдите эти числа.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1543, \\ x - y = 1101. \end{cases}$$

6. У Маши, Саши и Даши вместе 11 воздушных шариков. У Маши на 2 шарика меньше, чем у Даши, а у Саши на 1 шарик больше, чем у Даши. Сколько шариков у Даши?

7. Сумма пяти последовательных целых чисел равна 875. Найдите эти числа.

Пояснение. Попробуем сначала сложить числа $20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 110$. Получилось число, меньшее 875. А сумма $200 + 201 + 202 + 203 + 204 = 1010$ уже слишком велика.

8. Сумма четырех последовательных четных чисел равна 1996. Найдите эти числа.

9. Хозяин обещал работнику за 30 дней 9 рублей и кафтан. Через три дня работник уволился и получил кафтан. Сколько стоил кафтан?

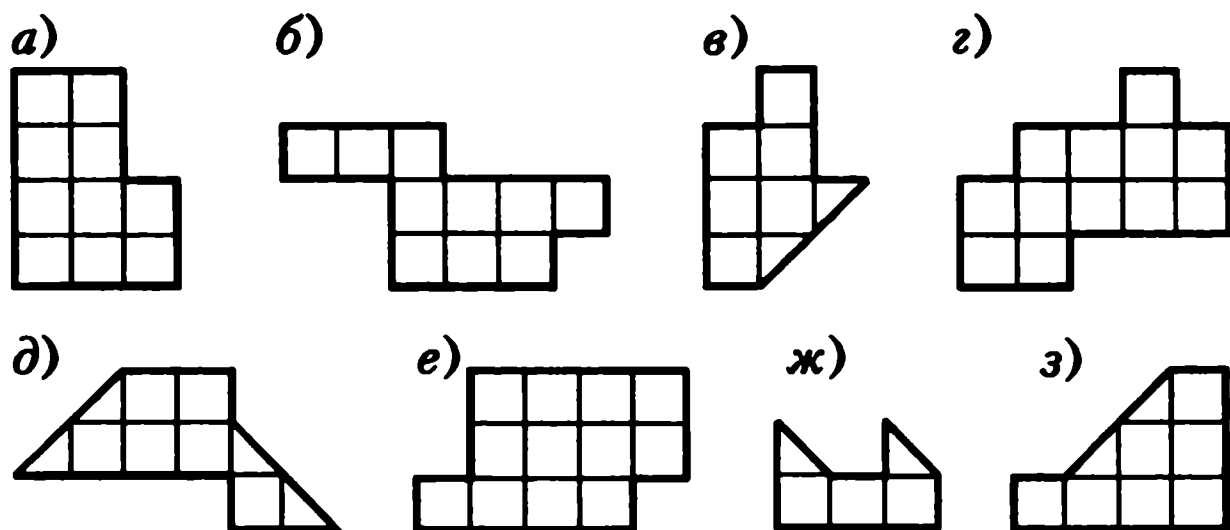


Рис. 2

10. Разрежьте каждую из фигур рисунков 2, а–з¹ пополам (т.е.. на две одинаковые и по площади, и по форме части).

2. Было три яблока...

– Вовочка, сосчитай на карте, сколько всего материков.

– Мария Ивановна, у нас же сейчас не математика!

Следующие три задачи очень легкие, но обратите внимание, как в разных ситуациях возникает одно и то же равенство $3 - 1 = 2$.

11. Было три яблока. Одно из них съели. Сколько осталось?

12. Сколько нужно сделать распилов, чтобы бревно распалось на три части?

13. У мальчика сестер на 3 больше, чем братьев. На сколько девочек больше, чем мальчиков?

Теперь легко справиться и с такой задачей:

14. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

¹ Каждый пункт – отдельная задача, так что фигуры из разных пунктов никак не связаны между собой.

15. Вычислите устно: а) $15 + 27 + 5 + 43$; б) $16 + 33 + 14 + 37$; в) $12 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 10$; г) $3 + 137 + 444 + 873 + 556 + 997$; д) $5005 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 5$; е) $(257368 + 2573) + (42632 - 1573)$.

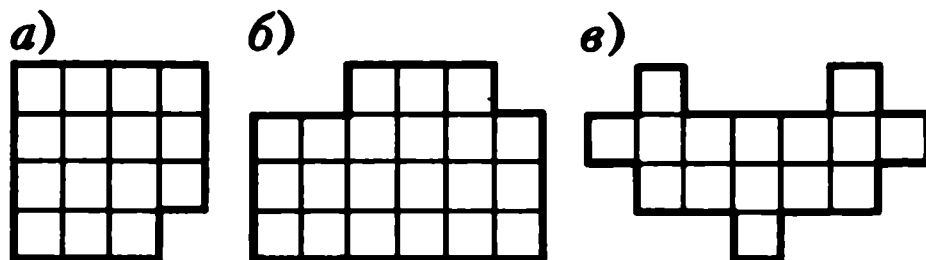


Рис. 3

16. Разрежьте каждую из фигур рисунков 3, а–в на три равные части. (Резать

можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равны не только по площади, но и по форме.)

3. Переправы

Обычный метод преодоления трудности состоит в том, чтобы обойти ее.

17. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Смогли ли солдаты переправиться через реку?

18. Может ли крестьянин перевезти через реку волка, козу и капусту, если в лодку вместе с ним помещается только или волк, или коза, или капуста? (Нельзя оставить без присмотра ни волка с козой, ни козу с капустой.)

19. По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им – еще три парохода (рис.4). Канал такой узкий, что два парохода в нем разъехаться не могут, но в нем есть залив, где может поместиться один пароход. Могут ли они разъехаться?



Рис. 4

20. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама – за 2, малыш – за 5, а бабушка – за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя. Кидаться фонариком нельзя.)

21. Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевезти лишь одного человека. Тем не менее они переправились в лодке через реку и продолжили путешествие. Могло ли так быть?

$ABCabc$	$л$	
$ABCa$	$л$	bc
$ABCab$	$л$	c
ABC	$л$	abc
$⋮$		$⋮$
	$л$	$ABCabc$

Рис. 5

22*. Могут ли три рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

Указание. Чтобы не запутаться, обозначьте рыцарей буквами A, B, C , а оруженосцев – соответственно, a, b, c . Проведите черточки, которые будут

обозначать реку (рис. 5). Затем не ленитесь явно выписывать все передвижения лодки, каждый раз отмечая, кто на каком берегу и где находится лодка. (На рисунке – одно из решений задачи. Часть строк, чтобы не было скучно, пропущена.)

23*. В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера² и три каннибала³. Миссионеры боятся остаться в меньшинстве. Только один миссионер и один каннибал умеют грести. Помогите им переправиться.

4. Сбежали цифры

В этой сказке нет порядка – что ни слово, то загадка.

Б.Заходер

24. Восстановите поврежденные записи арифметических действий:

а)
$$\begin{array}{r} + \quad 5* \\ *84 \\ \hline ***0 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} + \quad ** \\ * \\ \hline **8 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} 6*5* \\ - *8*4 \\ \hline 28\ 56 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} 5927 \\ \times \bullet\bullet 45 \\ \hline 78\bullet\bullet \\ \hline 18214 \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} 3*86 \\ + *2*7 \\ \hline 804* \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} \times \quad ** \\ 5\ 2 \\ \hline *6 \\ + ** \\ \hline *7* \end{array}$$

² Слово «миссионер» означает – проповедник, посланец.

³ Каннибал – людоед.

$$\begin{array}{r} \text{ж)} \quad \times 27 \\ \quad \times \quad \ast\ast \\ \hline \quad \ast\ast 8 \\ + \quad \ast\ast \\ \hline \quad 3\ast\ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{з)} \quad \times 6\ast \\ \quad \times \quad \ast\ast\ast \\ \hline \quad \ast\ast \\ + \quad \ast\ast \\ \hline \quad \ast\ast \\ \hline \quad \ast\ast\ast 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{и)} \quad \times 2\ast \\ \quad \times \quad \ast 2 \\ \hline \quad \ast 8 \\ + 7\ast \\ \hline \quad 7\ast 8 \end{array}$$

25. Витя выложил из карточек пример на сложение и затем поменял местами две карточки (рис.6). Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

26. Какое число в 7 раз больше его последней цифры?

27. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Рис. 6

Разделите каждую из фигур рисунков 7,а,б по линиям сетки на четыре одинаковые части, чтобы в каждой части был ровно один кружок.

29. В корзине 20 грибов: белые, подосиновики и подберезовики. Сколько в корзине белых грибов, если подберезовиков в ней в 9 раз больше, чем подосиновиков?

29'. В коробке лежат 14 шаров – белых, красных и черных, – причем белых в 7 раз больше, чем красных. Сколько в коробке черных шаров?

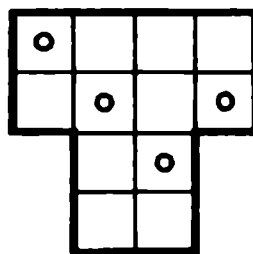
30. По контракту Гансу причиталось по 48 талеров за каждый отработанный день, а за каждый прогул с него взыскивались 12 талеров. Через 30 дней Ганс узнал, что ему ничего не причитается и он ничего не должен. Сколько дней он работал?

31. Весы пришли в равновесие, когда на одну чашу поставили гири по 2 кг, а на другую – по 5 кг, всего 14 гирь. Сколько двухкилограммовых гирь поставили на весы?

31'. Картофель расфасован в 24 пакета по 5 кг и по 3 кг. Общая масса пятикилограммовых пакетов равна массе трехкилограммовых пакетов. Сколько пятикилограммовых пакетов?

32. После 7 стирок и длина, и ширина, и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска?

а)



б)

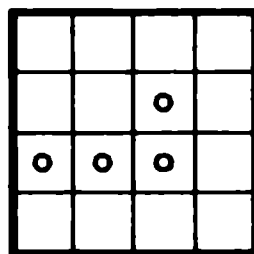


Рис. 7

5. Нехватки и избытки

33. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 5 копеек. А на 15 тетрадей у него не хватило 7 копеек. Сколько денег было у школьника?

Наводящий вопрос. Сколько стоят $15 - 11 = 4$ тетради?

34. Тане не хватает 200 рублей для покупки 8 воздушных шариков. Если она купит 5 шариков, то у нее останется 1000 рублей. Сколько стоит шарик?

34'. Если я захочу купить 4 карандаша, то мне не хватит 3 копеек, а если я куплю 3 карандаша, то у меня останется 6 копеек. Сколько у меня денег?

35. Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, каждой кошке — 5. Сколько было собак и сколько кошек?

Замечание. Любой, кто умеет составлять уравнения, легко найдет ответ в этой задаче. Можно решить ее и перебором: для числа кошек не так много возможностей, всего лишь от 0 до 10. Однако если подойти к делу толково, то найдем простое замечательное рассуждение без алгебры и без перебора вариантов. Поэтому обязательно, получив ответ, прочитайте решение!

Впрочем, так надо делать всегда: сначала решать самостоятельно, потом читать чужое решение. Если ничего не получается, не стоит тратить слишком много времени за один раз. Лучше записать номер этой задачи и через день-другой вернуться со свежими силами. Бывает, казавшаяся неприступной задача сразу «сдается» при второй попытке. И только если целый месяц ничего не выходит — читайте решение! (Я сам использовал и всем советую такой прием: записывать при первом чтении номера не поддавшихся задач на отдельный листочек и потом, при очередном прочтении, вычеркивать их.)

6. Чем отличается овца от курицы?

36. У овец и кур вместе 36 голов и 100 ног. Сколько овец?

Решение. Если все 36 животных — куры, то ног $2 \cdot 36 = 72$. Чем отличается овца от курицы? У овцы на 2 ноги больше! Значит, заменяя курицу на овцу, мы увеличиваем число ног на две, и таких замен надо произвести $(100 - 72) : 2 = 14$.

Ответ: 14 овец.

37. Вовочка собрал в коробку жуков и пауков – всего 8 штук. Если всего в коробке 54 ноги, сколько там пауков? (У жука 6 ног, у паука – 8.)

37'. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 6x + 8y = 54. \end{cases}$$

38. На поляне ребята пасут жеребят. Если пересчитать ноги ребят и жеребят, то будет 74, а если считать головы, то 22. Сколько на лугу жеребят?

39. Один человек купил 112 баранов старых и молодых, заплатив за них 49 рублей и 20 алтын. За каждого старого барана он платил 15 алтын и 4 полушки, а за молодого – 10 алтын. Сколько каких баранов было куплено? (В одном алтыне 3 копейки, а в одной копейке – 4 полушки.)

40. Разрежьте каждую из фигур рисунков 8, а–в на четыре равные и по площади, и по форме части.

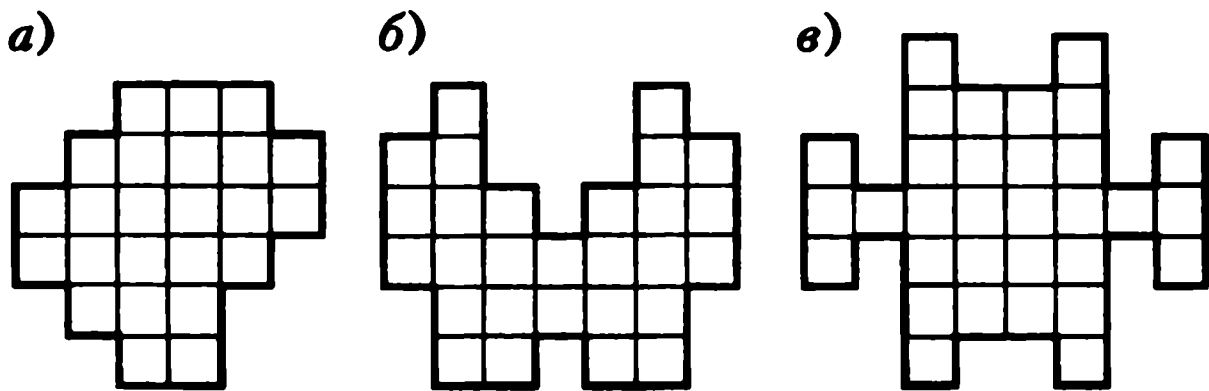


Рис. 8

41. Разрежьте изображенную на рисунке 9 фигуру на 9 равных частей⁴.

42. В двух пачках всего 30 тетрадей. Когда из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, в первой стало вдвое меньше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

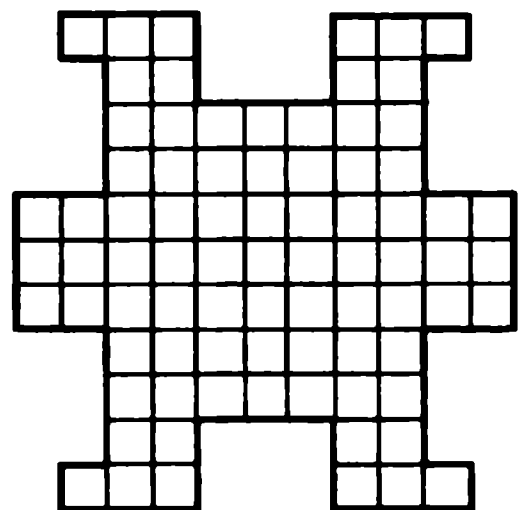


Рис. 9

⁴ Части должны быть равны не только по площади, но и по форме. Другими словами, если эти части вырезать из бумаги, то их можно будет точно наложить одну на другую. (В математике такие фигуры называют *конгруэнтными*.)

7. Шутки

*Не любо – не слушай,
а врать не мешай.*

43. В корзине лежат 5 яблок. Разделите их между пятью лицами, чтобы каждый получил по яблоку, и при этом одно яблоко осталось бы в корзине.

44. Экипаж, запряженный тройкой лошадей, проехал за час 15 км. С какой скоростью бежала каждая лошадь?

45. Двое играли в шахматы четыре часа. Сколько времени играл каждый?

46. В семье 5 братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье?

47. Два отца и два сына съели за завтраком три яйца, причем каждому досталось целое яйцо. Могло ли так случиться?

48. Сколько в доме животных, если все они, кроме двух, собаки, все, кроме двух, кошки и все, кроме двух, попугаи?

49. Придумайте вопрос, на который никто никогда не ответит «да» (если, конечно, не соврет).

50. Президент произнес истинное утверждение. Вице-президент повторил его дословно, и оно стало ложным. Могло ли так случиться?

51. В двух кошельках лежат две монеты, причем в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Может ли так быть?

52. Подряд стоят 6 стаканов: 3 с водой и 3 пустых (рис. 10). Дотронувшись рукой лишь до одного стакана, добейтесь, чтобы пустые и полные стаканы чередовались.

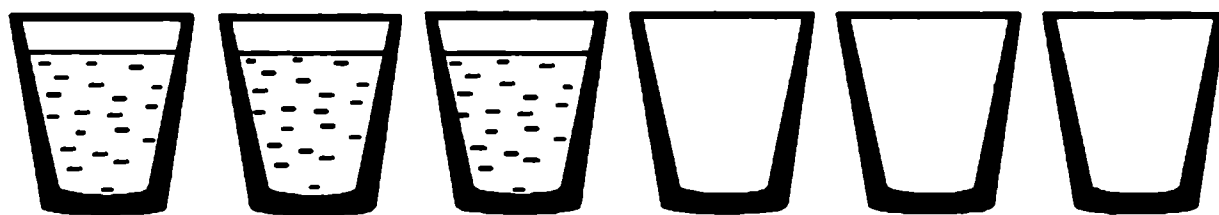


Рис. 10

53. Почему в поездах все стоп-краны всегда красные, а в самолетах все стоп-краны голубые?

54. Остап Бендер решил дать сеанс одновременной игры Карпову и Каспарову. Один из них должен играть белыми, а другой – черными. Остап уверен, что он или сведет вничью обе партии, или одну выиграет. Как он собирается играть?

55. Один господин написал о себе: «... пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на ногах десять...» Что он забыл?

56. Представьте себе корабль со спущенной на воду веревочной лестницей вдоль борта. У лестницы 10 ступенек. Расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается воды. Начинается прилив, который поднимает воду каждый час на 20 см. Через какое время покроется водой третья снизу ступенька лестницы?

*Моя слепота – это жертва
привычке смотреть в корень.*

Крот

57. Угадайте закономерность форм фигурок рисунка 11. Какую фигурку надо поставить следующей? А после нее?

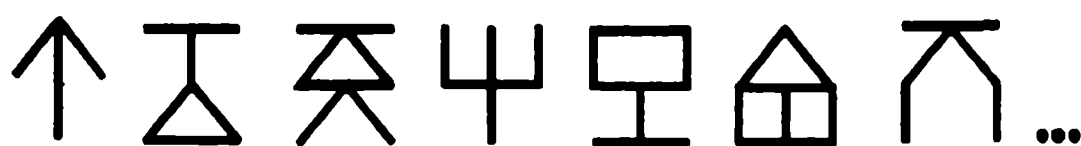


Рис. 11

8. Сын отца профессора

*А все, однако же, как поразмыслишь,
во всем этом, право, есть кое-что.
Что ни говори, а подобные происшествия
бывают на свете; редко, но бывают.*

Н. Гоголь

58. Король пожелал сместить своего министра, не слишком обидев его. Он подозвал министра к себе и предложил выбрать один из двух листочков, пояснив, что на одном написано «Уходите», а на другом – «Останьтесь». Листок, который вытащит министр, решит его судьбу. Министр догадался, что на обоих листках написано «Уходите». Помогите министру сохранить свое место!

59. Придумайте четырехзначное число, десятичная запись которого состоит из одинаковых цифр, но в его русском названии все слова начинаются с разных букв.

60. Придумайте трехзначное число, запись ⁵ которого состоит из различных цифр, следующих в порядке возрастания, а в его названии ⁶ все три слова начинаются с одной и той же буквы.

⁵ Для Придиры. В десятичной системе счисления.

⁶ Для него же. Язык, разумеется, русский.

61. Из Москвы в Петербург помчал на «Volvo» предприниматель Вася. Навстречу в то же время на велосипеде выехал доцент Иван Петрович. Кто из них в момент встречи был ближе к Москве?

62*. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Может ли так быть?

Подсказка. Сын отца – это брат. А вот кто отец сына?..

63. Учитель показал лист бумаги, на котором нарисовано несколько кружочков, и спросил Эльдара, сколько на листе кружочков. «Семь», – ответил Эльдар. «Правильно!» – сказал учитель, положил тот же лист перед Элиной и повторил вопрос. «Пять кружочков», – ответила Элина. «Правильно!» – согласился учитель.

Сколько кружочков было нарисовано на этом листе бумаги?

Чтобы решить задачу, смотрите на нее, пока решение не придет в голову.

64. а) Разрежьте невыпуклый четырехугольник (рис.12) на шесть частей двумя прямыми.⁷ б) Сделайте то же самое с подковой (рис.13).

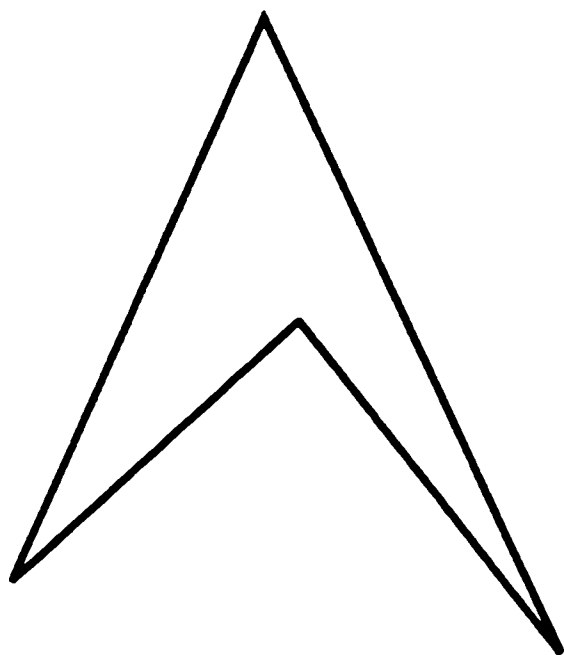


Рис. 12

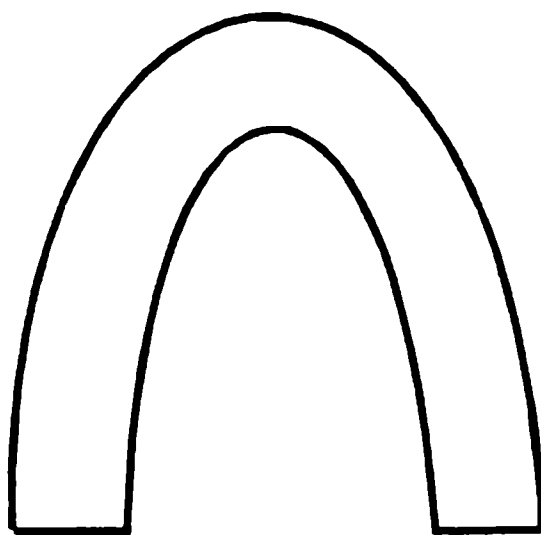


Рис. 13

⁷ Фигуру называют выпуклой, если всякий отрезок, соединяющий ее точки, целиком принадлежит ей. Выпуклый четырехугольник лежит от любой своей стороны по одну сторону, а невыпуклый, изображенный на рисунке 12, этим свойством не обладает.

65. На какое наибольшее число частей можно разделить тремя прямыми разрезами а) блин; б) булку? (Части нельзя перекладывать.)

9. Сколько надо взять?

Сколько нужно, чтобы стало можно?

А.Анисимов

66. В коробке лежат 10 красных и 10 синих воздушных шариков. Продавец, не глядя, достает по одному шарiku. Сколько шариков надо вытащить, чтобы среди вынутых из коробки шариков обязательно нашлись два шарика одного цвета?

67. Сколько карандашей надо взять в темноте из коробки с 7 красными и 5 синими карандашами, чтобы было взято не меньше двух красных и не меньше трех синих?

68. В пакете перемешали конфеты трех сортов, неразличимых на ощупь. Какое наименьшее число конфет надо взять наугад из пакета, чтобы среди взятых конфет обязательно были

а) хотя бы две одного сорта;

б) хотя бы три одного сорта?

69. Сколько карандашей можно взять в темноте из коробки с 10 красными, 8 синими, 8 зелеными и 4 желтыми карандашами, чтобы в коробке заведомо осталось

а) не меньше 6 синих карандашей;

б) хотя бы по одному карандашу каждого цвета;

в) не больше 6 синих карандашей?

70. В ящике 28 красных, 20 зеленых, 12 желтых, 20 синих, 10 белых и 10 черных шариков. Сколько шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди вытащенных шариков обязательно оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

Наводящий вопрос. Сколько шариков может выбросить из ящика забравшийся в него недоброжелатель, чтобы среди выброшенных не было 15 одноцветных шариков?

71. В темной кладовой в беспорядке лежат ботинки: 10 пар черных и 10 пар коричневых. Сколько ботинок надо взять, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета? (В темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого.)

Указание. Если возьмем 20 ботинок, то может оказаться, что все они на левую ногу: 10 левых коричневых и 10 левых черных. Значит,

надо взять 21 ботинок. Осталось понять, почему при любом способе выбора 21 ботинка из 40 имеющихся найдется хотя бы одна пара. Это кажется очевидным. Но как убедительно и немногословно обосновать это утверждение?

72. В гости пришло 6 человек в галошах разного размера. Расходились по одному, и некоторые надевали галоши большего размера.

а) Сколько могло остаться гостей, не сумевших надеть галоши?

б) А если гостей не 6, а 17?

73. Винни-Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа-Иа вместе съели 70 бананов, причем каждому сколько-то досталось. Винни-Пух съел больше каждого из остальных, а Кролик и Пятачок вместе съели 45 бананов. Сколько бананов досталось ослику?

Даже если объяснение настолько ясно, что исключает всякое ложное толкование, все равно найдется человек, который все перепутает.

74*. В погребе 8 банок клубничного варенья, 7 малинового и 5 вишневого. Сколько банок можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там останутся еще хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

10. Перекладывания спичек

75. Уберите указанное слева на рисунках 14, а–е число спичек, чтобы осталось указанное справа число квадратов со стороной в одну спичку.⁸

76. На рисунке 15 из спичек сложен квадрат 3×3 . Уберите

а) 4 спички, чтобы осталось 5 квадратов;

б) 8 спичек, чтобы осталось 2 квадратов;

в) 6 спичек, чтобы осталось 3 квадрата.

77. Переложите указанное слева на рисунках 16, а–в число спичек, чтобы получилось указанное справа число квадратов.

78. Положите 12 спичек, чтобы получились четыре маленьких квадрата и один большой.

79. Из десяти спичек составьте три квадрата.

⁸ Никаких болтающихся без дела спичек не должно быть!

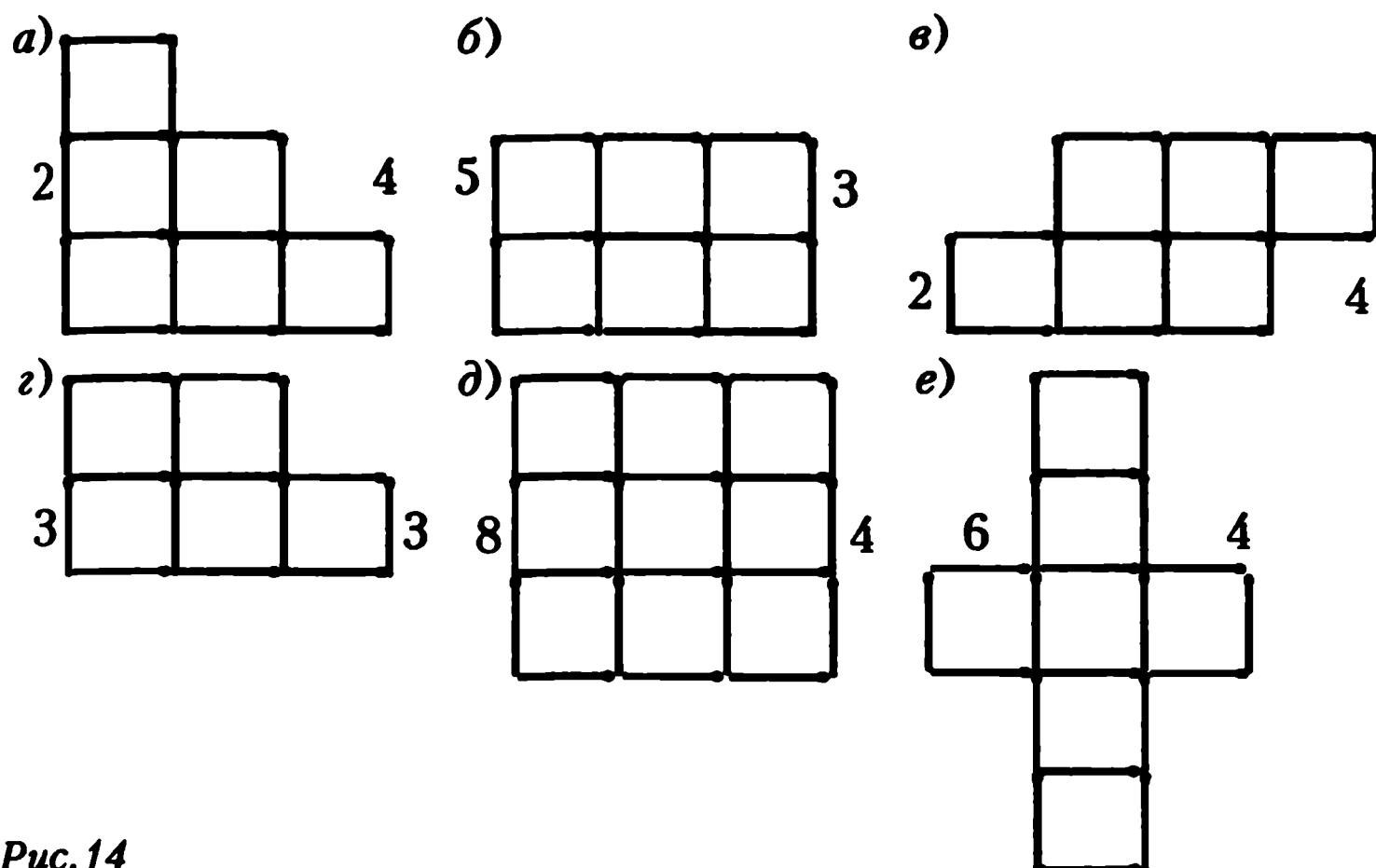


Рис. 14

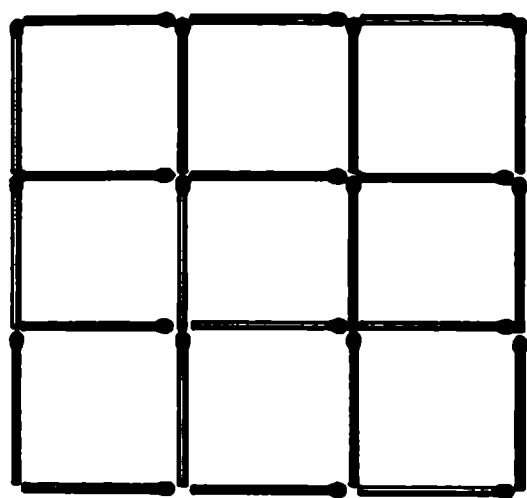


Рис. 15

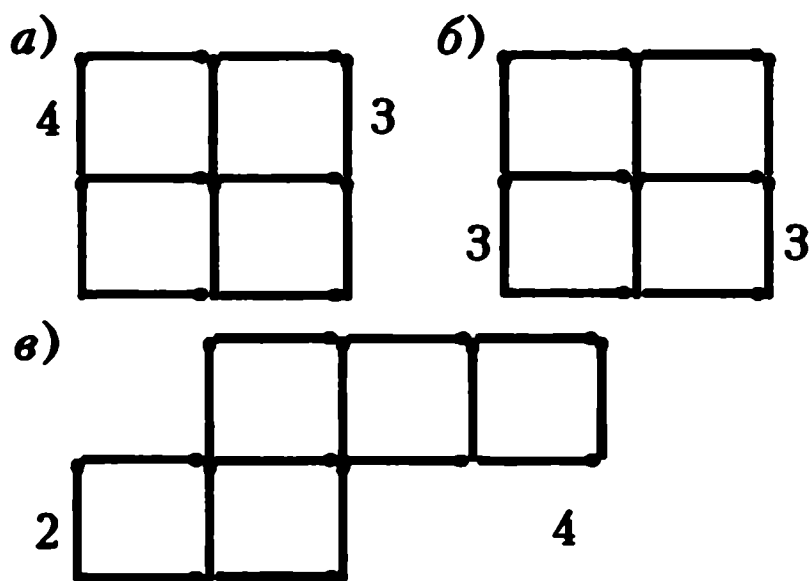


Рис. 16

80. Из шести спичек составьте четыре треугольника.
Указание. Можно использовать клей или пластилин.

81. а) Девочка заменила каждую букву своего имени ее номером в русском алфавите и получила число 2011533. Как ее зовут?

б) Число 222122111121 получается, если в некотором слове заменить буквы на их номера в алфавите. Какое это слово?

82. а) Закрасьте несколько клеток квадрата размером 4×4 так, чтобы любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя незакрашенными, а любая незакрашенная – с одной закрашенной.

б) Расставьте в клетках квадрата 4×4 знаки $\leftarrow + \rightarrow$ и $\leftarrow - \rightarrow$ так, чтобы для любой клетки ровно в одной клетке, соседней с ней по стороне, был противоположный знак.

83. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаем одинаковыми. Периметр – это сумма длин всех четырех сторон.)

84. Не отрывая карандаш от бумаги, проведите через
 а) вершины квадрата (рис.17) три отрезка, вернувшись в исходную точку;
 б) девять точек, расположенных в

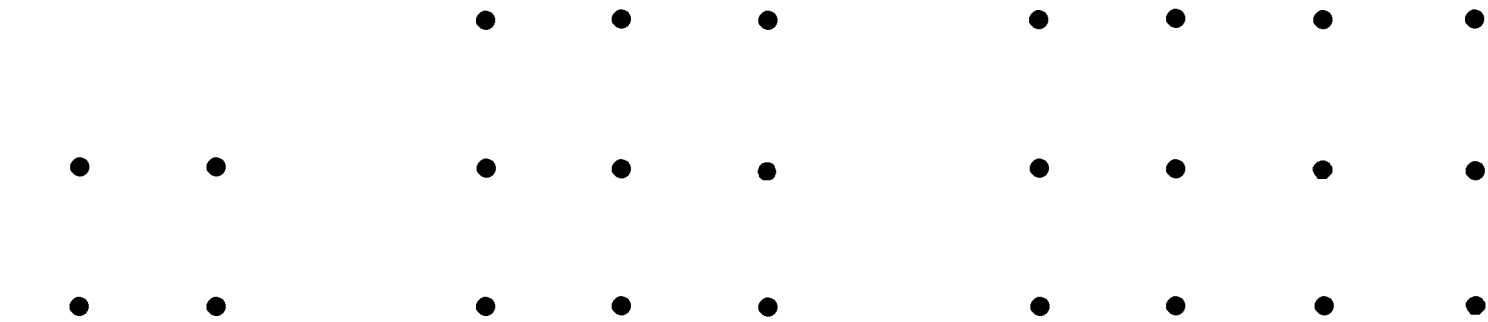


Рис. 17

Рис. 18

Рис. 19

виде квадрата (рис.18), четыре отрезка (возвращаться в исходную точку не обязательно);
 в) шестнадцать точек, расположенных в виде квадрата (рис.19), шесть отрезков, вернувшись в исходную точку.

11. Принцип Дирихле

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

Козьма Прутков

В несерьезной форме принцип Дирихле⁹ гласит: «Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки, чтобы в каждой было не больше 2 кроликов.»

Более общая формулировка: «Если z зайцев сидят в k клетках, то найдется клетка, в которой не менее z/k зайцев». Не надо бояться дробного числа зайцев – если

⁹ Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859), великий немецкий математик, изучал арифметику (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии), математический анализ (признак сходимости Дирихле, ряды Дирихле), механику и математическую физику (принцип Дирихле в теории гармонических функций). Он, разумеется, и не подозревал, что его именем назовут столь простой и важный принцип.

получается, что в ящике не меньше $7/3$ зайцев, значит, их больше двух.

Один математик сказал, что Дирихле по частоте упоминаний школьниками навсегда обеспечено одно из самых высших мест. И добавил: «Пожалуй, есть способ лишить его лидерства – назвать чьим-нибудь именем принцип «никакое четное число не равно никакому нечетному».

Доказательство принципа Дирихле очень простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения «от противного» часто встречаются. Допустим, что в каждой клетке число зайцев меньше, чем z/k . Тогда в k клетках вместе зайцев меньше, чем $k \cdot (z/k) = z$. Противоречие!

85. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

86. В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

87. Почему в Москве номера телефонов семизначные, а не пятизначные?

Решение. Пятизначных номеров всего 100000 (если разрешить использовать все комбинации, от 00000 до 99999). А телефонов в Москве гораздо больше! (Не смею заявить с абсолютной уверенностью, поскольку у меня не было случая их пересчитать, но думаю, что телефонов в Москве больше 1000000, так что не хватило бы даже шестизначных номеров.)

88. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что в классе, в котором не менее 34 учеников.

Указание. Если бы в каждом классе было меньше 34 учеников, то в 30 классах школы училось бы не более $30 \cdot 33 = 990$ человек.

89. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки одного сорта. Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?

90. На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьет какого-нибудь другого ферзя.

91. В классе 30 учеников. В диктанте Вова сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что по крайней мере 3 ученика сделали одно и то же число ошибок.

92. Найдите значение дроби $\frac{В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е}{К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н}$, где разные буквы – это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения.

Подсказка. В Тбилиси эту задачу любили формулировать так:

$$\frac{\Gamma \cdot \Pi \cdot \Upsilon \cdot \Sigma \cdot \Theta \cdot \Upsilon}{\Theta \cdot \text{Б} \cdot \text{И} \cdot \text{Л} \cdot \text{И} \cdot \text{С} \cdot \text{И}}?$$
чему равно частное

93. Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно покрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)?

Решение. Ответ очевиден из рисунка 20, на котором никакие две из девяти закрашенных клеток не соприкасаются, а десятую клетку с соблюдением условия не покрасишь. Но как строго доказать, что

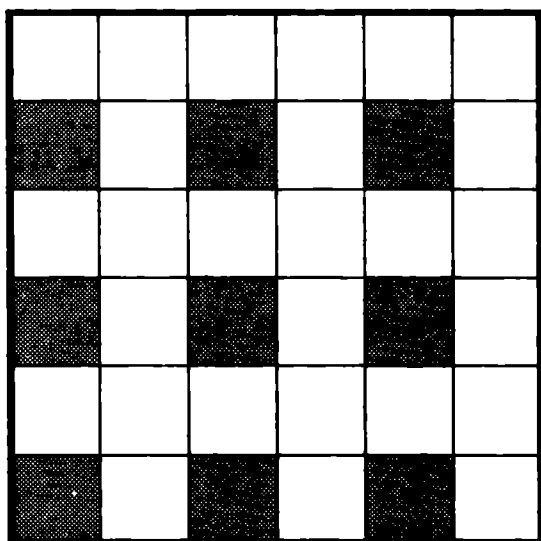


Рис. 20

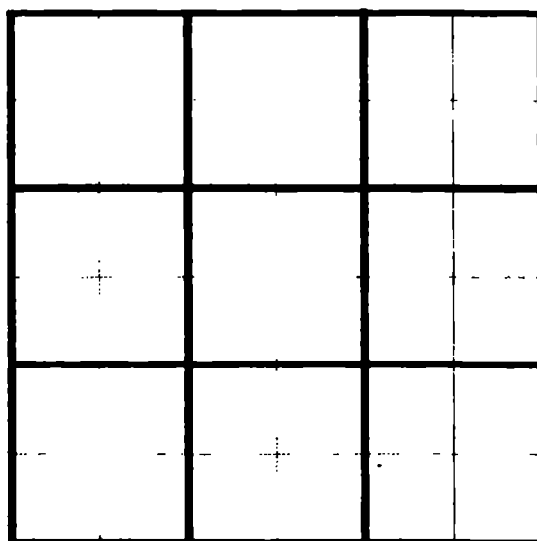


Рис. 21

никак никаким другим способом нельзя расположить на доске десять несоприкасающихся клеток? Перебором? Вариантов гораздо больше, чем кажется на первый взгляд. И уж совсем невозможно решение методом перебора, если доску 6×6 заменить, например, на доску размером 2000×2000 . Оказывается, можно разбить доску на квадраты размером 2×2 (рис.21). Больше одной окрашенной клетки в таком квадрате быть не может!

12. Разность некоторых двух из $n + 1$ целых чисел кратна n

Не больше сотни, но навалом, кучей.

Э.Гельвик

94. Из любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна. Докажите это.

Решение. Все целые числа можно разбить на два класса: четные и нечетные. Невозможно распределить три числа по двум классам так, чтобы ни в какой класс не попало более одного числа. Значит, среди любых трех целых чисел найдутся два числа одинаковой четности. Их сумма четна.

95. Среди любых шести целых чисел найдутся два числа, разность которых кратна 5.

96. Докажите, что из любых $n + 1$ целых чисел можно выбрать два числа, разность которых нацело делится на n .

97. Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых – двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

98. Из любых ли ста целых чисел можно выбрать два числа, сумма которых кратна 7?

99. Существуют ли более пятидесяти различных двузначных чисел, сумма никаких двух из которых не равна 100?

100. Из любых ли а) 51; б) 52 целых чисел можно выбрать два числа, сумма или разность которых кратна 100?

101. Расставьте числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 в таком порядке, чтобы между единицами оказалась бы одна цифра, между двойками – две, между тройками – три, а между четверками – четыре цифры.

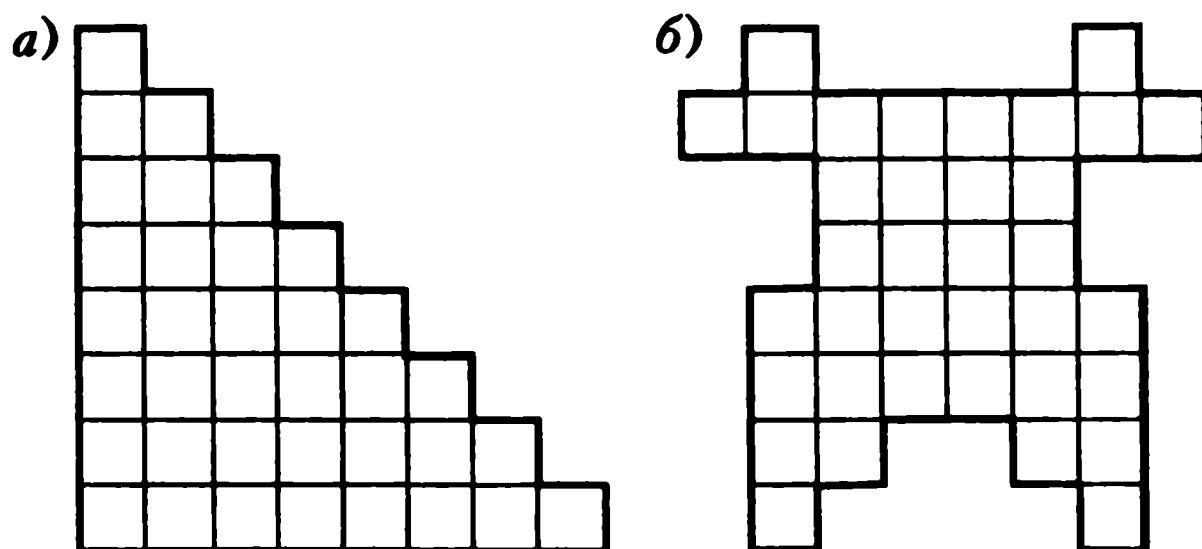


Рис. 22

102. Разрежьте фигуры каждого из рисунков 22, а, б на трехклеточные уголки.

13. Всякая палка о двух концах

В высотном здании МГУ есть переход между общежитием и учебной зоной. С 13-го этажа учебной зоны он идет на 19-й (!) этаж общежития. Почему? Прежде чем отвечать на этот вопрос, решите следующую задачу.

103. Во сколько раз лестница на 6-й этаж дома длиннее лестницы на 2-й этаж этого же дома (рис.23)?

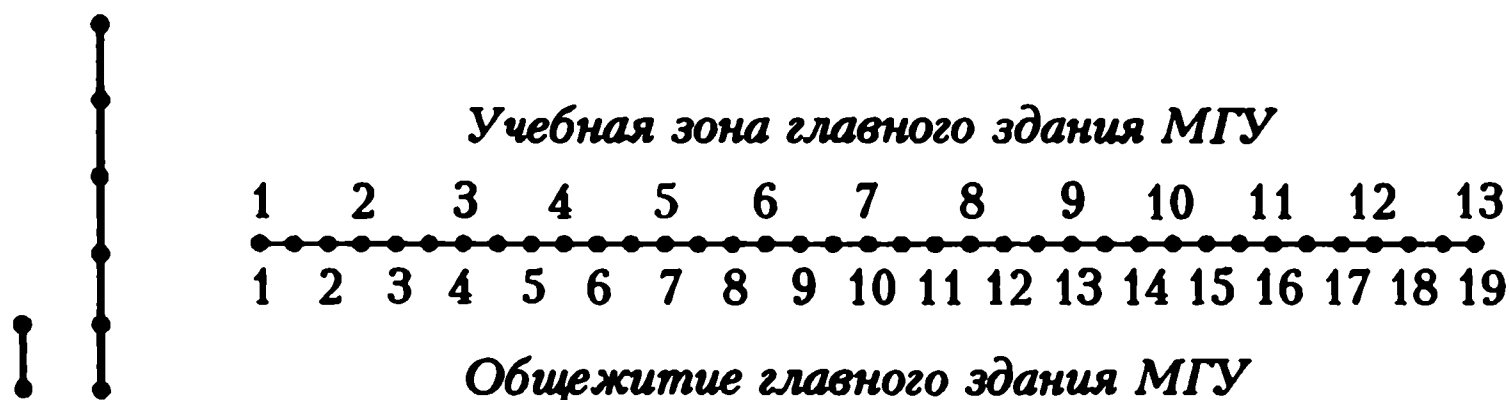


Рис. 23 Рис. 24

Теперь с университетскими лестницами все ясно: в учебной зоне этажи высокие, в полтора раза выше, чем в общежитии. И именно таким образом соотносятся числа $13 - 1 = 12$ и $19 - 1 = 18$ (рис.24).

104. Костя разложил в ряд 5 камешков на расстоянии 3 см один от другого. Каково расстояние от первого камешка до последнего?

105. От куска сукна в 16 метров портной отрезает ежедневно по 2 метра. По истечении скольких дней он отрежет последний кусок?

105'. Каждую минуту от бревна длины 6 аршин отпиливают 1 аршин. За сколько минут распилят все бревно?

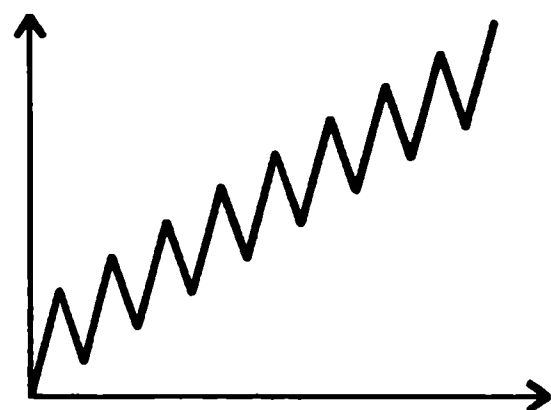


Рис. 25

2	3	2
3		3
2	3	2

Рис. 26

106. Сколько распилов придется сделать, чтобы распилить 60 трехметровых бревен на полуметровые поленья?¹⁰

107. Кузнец соединил 5 цепей, по 3 звена в каждой, в одну цепь, раскрыв 4 кольца и снова их заковав. Нельзя ли было выполнить работу быстрее?

108. В шесть часов утра в понедельник гусеница начала вползать на дерево высотой в 12 м. За день, т.е. до 18 часов, она поднималась на 4 м, а за ночь спускалась на 3 м. Когда она достигнет вершины?

Указание. На рисунке 25 изображен график движения гусеницы.

109. Золотошвея разместила 20 учениц в комнатах своего дома, как

¹⁰ Пилить несколько бревен одновременно нельзя.

показано на рисунке 26. По вечерам она проверяла, чтобы в комнатах на каждой стороне дома было 7 девушек. Однажды в гости к ним приехали 4 подружки.

а) Разместите всех так, чтобы золотошвея насчитала вдоль каждой стороны опять 7 девушек.

б) На следующий день 4 девушки провожали подруг. Разместите 16 оставшихся так, чтобы опять с каждой стороны оказалось по 7 девушек.

14. Двенадцать стульев

110. Поставьте 12 стульев в 3 ряда, чтобы

а) в двух рядах было по 4 стула, а в одном – 6;

б) в каждом ряду было 5 стульев.

111. Разместите вдоль стен квадратной комнаты

а) 10 стульев так, чтобы у каждой стены стояло 3 стула;

б) 12 стульев так, чтобы у каждой стены стояло 3 стула.

112. а) Расположите 6 точек на 4 отрезках, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.

б) Нарисуйте 5 равных по длине отрезков таким образом, чтобы на них можно было расположить 10 точек – на каждом отрезке по 4 точки.

в) Нарисуйте 6 отрезков и отметьте 9 точек, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.

г) Нарисуйте 6 отрезков и отметьте 12 точек, чтобы каждому отрезку принадлежали 4 точки.

113. Поставьте 24 стула в 6 рядов по 5 стульев в каждом.

15. Устный счет

Изучите азы науки, прежде чем взойти на ее вершины. Никогда не беритесь за последующее, не усвоив предыдущее.

И.Павлов

Решите следующие задачи устно!

114. Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трехзначное?

115. Сколько существует трехзначных чисел?

116. У Акулины и Анфисы денег поровну. Сколько денег должна дать одна из них другой, чтобы у Анфисы стало на 10 рублей больше, чем у Акулины?

117. Два пакета молока и пачка творога стоят 94 копейки. А две пачки творога и пакет молока стоят 80 копеек. Что дороже: пачка творога или пакет молока? На сколько?

118. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица вдвое дороже маленькой. Купили 5 больших птиц и 3 маленьких. Если бы вместо этого купили 3 больших птицы и 2 маленьких, то потратили бы на 20 рублей меньше. Сколько стоит большая птица?

119. Сколько дедушке лет, столько месяцев внучке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке и сколько внучке?

120. Деду, отцу и сыну вместе 100 лет. Отцу и сыну вместе 45 лет. Сын на 25 лет моложе отца. Сколько кому лет?

121. Если к моим деньгам добавить половину их, да еще 10 рублей, то у меня станет 100 рублей. Сколько у меня денег?

122. Деду 64 года, а внуку 16 лет. Через сколько лет дед станет втрое старше внука?

122'. Решите уравнение

$$64 + x = 3(16 + x).$$

123. Брат втрое богаче меня, отец втрое богаче брата, дед втрое богаче отца, а у нас вместе 1000 рублей. Сколько у меня денег?

124. Корова вчетверо дороже собаки, а лошадь вчетверо дороже коровы. Собака, две коровы и лошадь стоят 200 рублей. Сколько стоит корова?

125. Сын вдвое моложе отца. Родился он, когда отцу было 24 года. Сколько лет сыну?

125'. Сын втрое моложе отца. Когда отцу было 37 лет, сыну было 3 года. Сколько лет отцу?

126. Вычислите (обязательно устно!)

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

127. На двух руках 10 пальцев. А на 10 руках?

128. 3 курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 кур за 12 дней?

129. Пять рыбаков съели пять судаков за пять дней. За сколько дней десять рыбаков съедят десять судаков?

130. Три землекопа за 2 часа вырыли 3 ямы. Сколько ям выроют 6 землекопов за 5 часов?

131°. 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Сколько косцов за 3 часа выпьют такой же бочонок?

16. Разрезания

*Такой уже ты дряхлый и больной,
трясешься, как разбитая телега.*

– На что ты копишь деньги, старый Ной?

– На глупости. На доски для ковчега.

И.Губерман

132. Разрежьте каждую из фигур рисунков 27, а–ж на четыре равные части. (Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.)

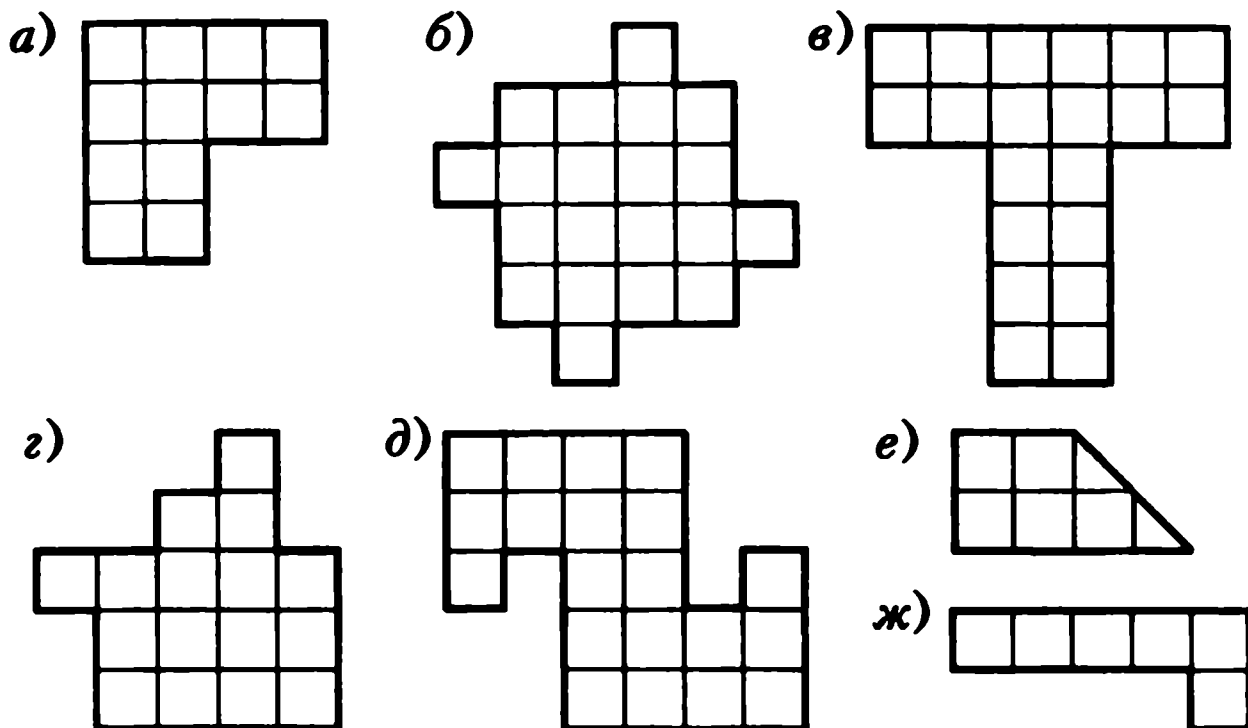


Рис. 27

133. Разрежьте квадрат на два равных а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) семиугольника. г) Разрежьте квадрат на три (не обязательно равных) шестиугольника.

134. Нарисуйте шестиугольник, который а) можно разрезать на два треугольника; б) нельзя разрезать на два четырехугольника.

135. Из прямоугольника 13×7 вырежьте 15 прямоугольников размером 2×3 .

136. Разрежьте фигуры рисунков 28, а, б на буквы Т, изображенные на рисунке 29.

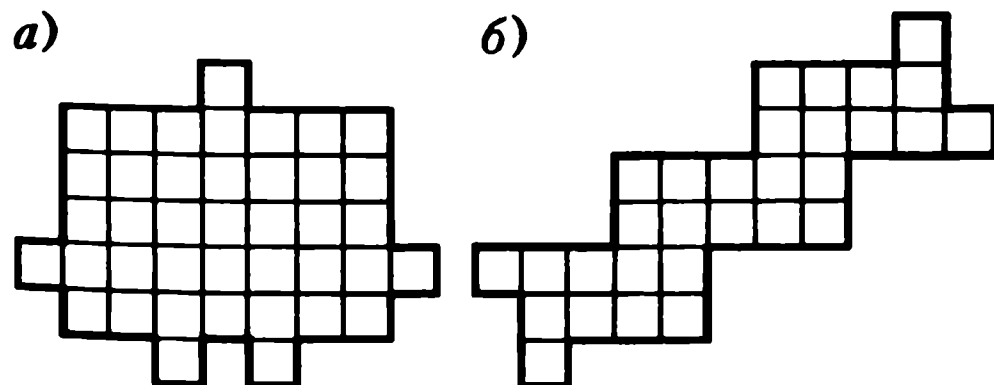


Рис. 28

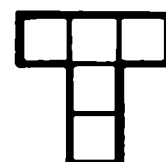


Рис. 29

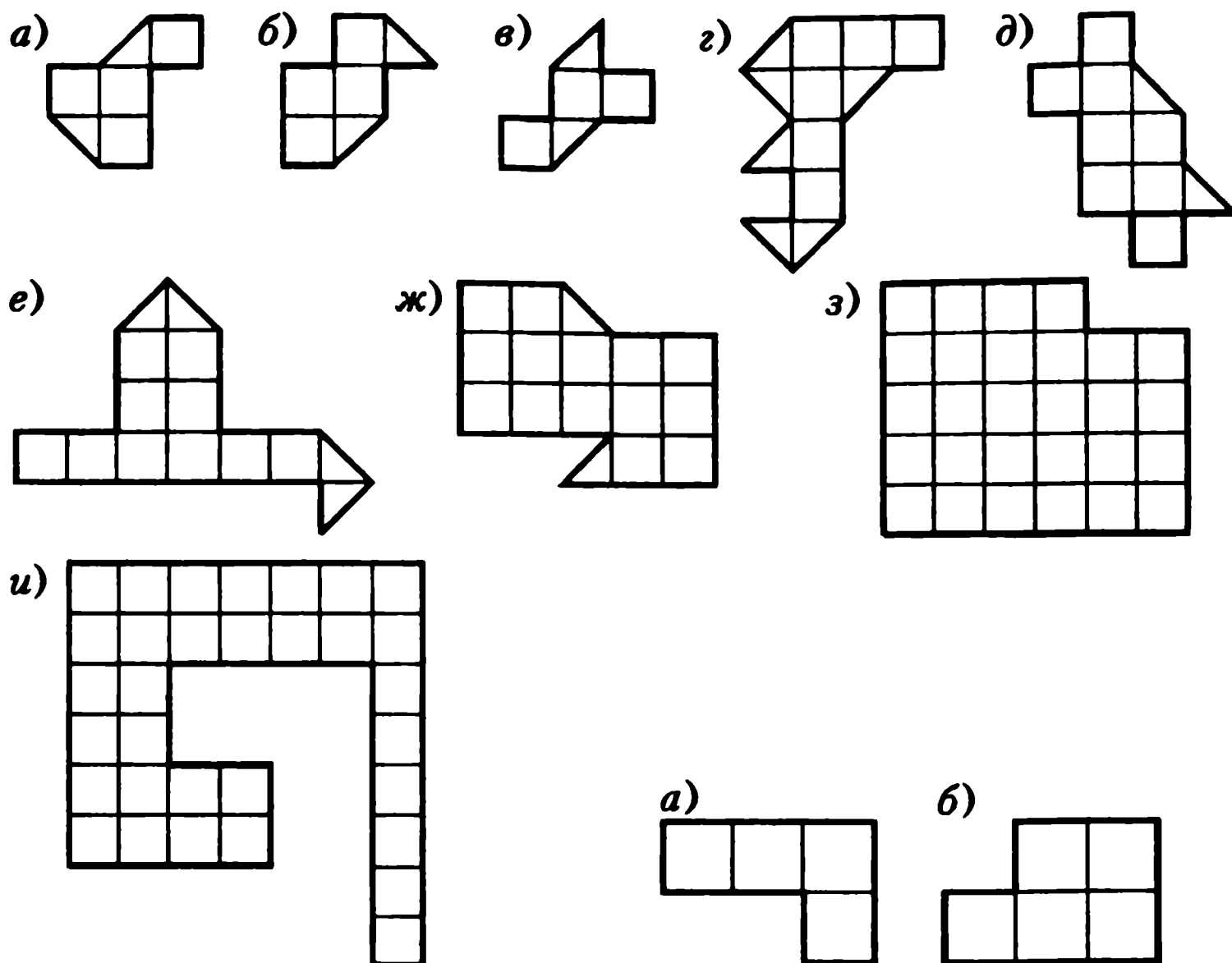


Рис. 30

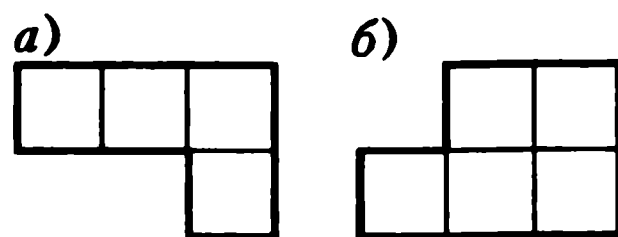


Рис. 31

137. Разрежьте каждую из фигур рисунков 30, а–и пополам (т.е.. на две одинаковые и по форме, и по площади части).

138. а) Разрежьте прямоугольник 5×8 на фигурки, изображенные на рисунке 31, а. б) Разрежьте прямоугольник 7×15 на фигурки, изображенные на рисунке 31, б.

139. а) Из прямоугольника 10×7 вырезали прямоугольник 1×6 , как показано на рисунке 32, а. Разрежьте полученную

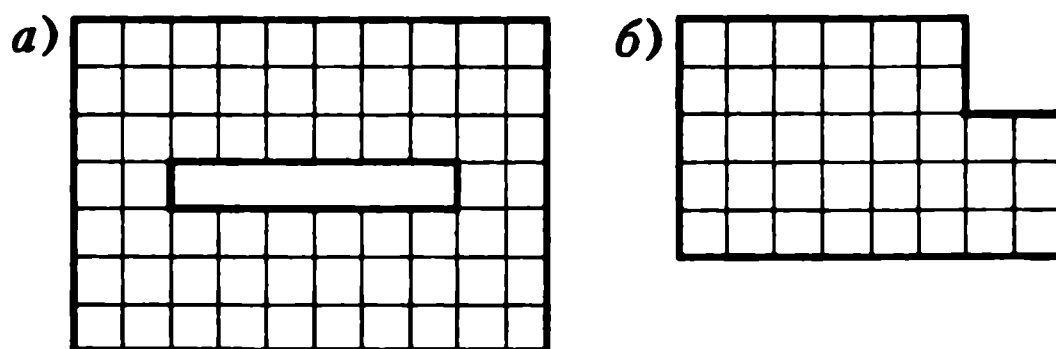


Рис. 32

фигуру на две части, из которых можно сложить квадрат. б) Сделайте то же самое с фигурой, изображенной на рисунке 32, б; в) то же – с прямоугольником 4×9 .

Указание. В пункте а) сторона квадрата будет равна 8, а в пунктах б) и в) – 6.

140. Разрежьте изображенную на рисунке 33 фигуру на а) четыре, б) пять одинаковых частей. (Резать можно не только по сторонам и диагоналям клеток.)

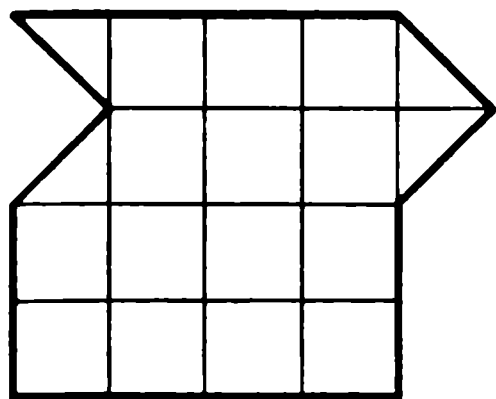


Рис. 33

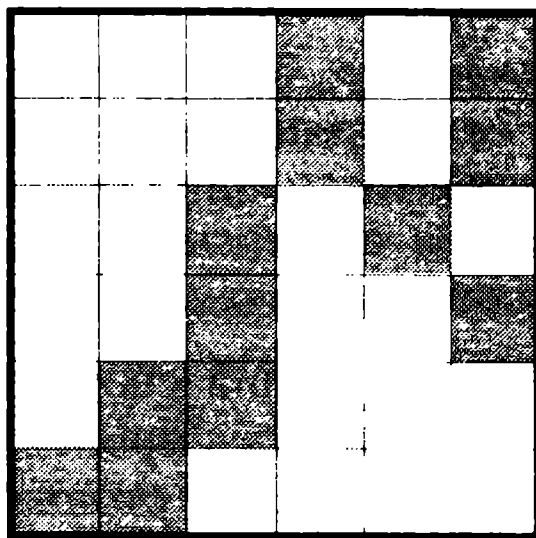


Рис. 34

Замечание. Пункт а) можно решить так же, как пункт б), а можно и по-другому.

141. Разрежьте изображенную на рисунке 34 доску на четыре одинаковые части, чтобы каждая из них содержала три заштрихованные клетки.

142. Квадрат разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 5×11 и 4×6 . Найдите размеры третьего прямоугольника.

143*. Разрежьте квадрат 7×7 на пять частей и переложите их так, чтобы получились три квадрата: 2×2 , 3×3 и 6×6 . Постарайтесь сделать это несколькими способами.

144. Покажите, как любой треугольник можно разрезать на четыре равных треугольника.

145. Разрежьте прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

146. Разрежьте произвольный треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

147. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить прямоугольный неравнобедренный треугольник.

17. Обратный ход

*Не то чудо из чудес,
что упал мужик с небес,
а то чудо из чудес,
как он туда залез!*

148. Я задумал число, умножил его на два, прибавил три и получил 17. Какое число я задумал?

149. Алеша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алеша?

Замечание. Можно составить уравнение $((x + 5) : 3) \cdot 4 - 6 : 7 = 2$ и решить его, а можно решать без уравнения, «с конца». Различий между этими двумя способами гораздо меньше, чем может показаться на первый взгляд: при решении уравнения, по сути, выполняются те же операции, что и при обратном ходе.

150. Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через 4 двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?

151. Предложил черт лодырю: «Всякий раз, как перейдешь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки». Трижды перешел лодырь мост – и остался совсем без денег. (Т.е., отдал в третий раз черту точно те 24 копейки, что оказались у него к этому моменту.) Сколько денег было у лодыря первоначально?

152. Половину мотка бечевки истратили, чтобы повесить белье. Половиной оставшегося подвязали цветы к колышкам. Половиной оставшегося перевязали лыжи, а тремя пятыми оставшегося связали из прутьев веник. Осталось всего 20 см. Какую длину имела бечевка первоначально?

153. Мама положила на стол сливы и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первой пришла Аня, взяла треть слив и ушла. Потом вернулся из школы Боря, взял треть оставшихся слив и ушел. Затем пришел Витя и взял 4 сливы – треть от числа слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мама?

154. Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было гусей?

Указание. Сначала сообразите, сколько гусей село на последнее озеро. Если ничего не получается, составьте уравнение $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = x$ и решите его. Дальше выясните, сколько гусей село на предпоследнее озеро, составив уравнение $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + 1 = x$ и решив его (а лучше – догадайтесь без уравнений). Заполняя кружочки рисунка 35 и расставляя числа над стрелками, завершите решение.

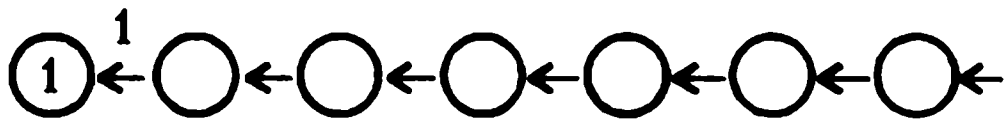


Рис. 35

155. Костя задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, полученное число умножил на 7, опять зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 21. Какое число задумал Костя?

155'. Факир задумал натуральное число, умножил его на 171, зачеркнул последние две цифры результата, умножил полученное число на 17, зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 742. Какое число он задумал?

156*. Из числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вновь вычли сумму его (полученного числа) цифр, и так делали снова и снова. После одиннадцати таких вычитаний впервые получился нуль. С какого числа начали?

18. Положите три спички

157. Положите на стол три спички, чтобы головки не касались стола. (Ставить спички «шалашиком» или пользоваться стенами, мебелью и тому подобным запрещено. Нельзя использовать и край стола, свесив с него головки спичек.)

158*. Может ли каждая из 4 треугольных стран иметь общий отрезок границы с каждой другой страной?

159. Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников, никакие два из которых не имеют общей стороны.¹¹

160. Разрежьте прямоугольник на 10 прямоугольников, чтобы никакие два соседних прямоугольника не образовывали прямоугольника. А на 1997 прямоугольников?

161*. На рисунке 36 изображены три квадрата, каждый из которых пересекает и ось абсцисс, и ось ординат по некоторому отрезку. Расположите на координатной плоскости без наложений четыре одинаковых квадрата так, чтобы и ось абсцисс, и ось ординат пересекали каждый квадрат по некоторому отрезку.

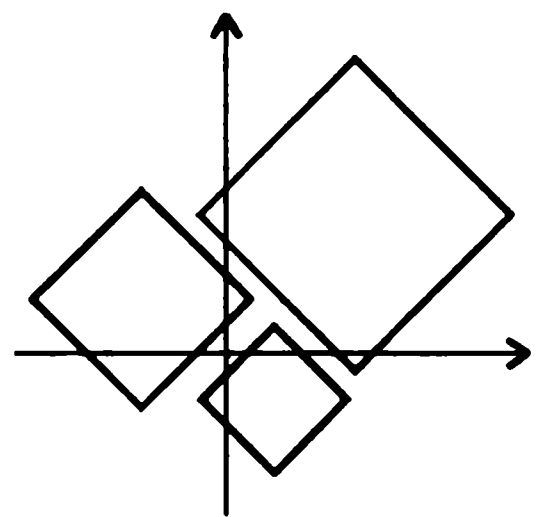


Рис. 36

¹¹ Сторона одного прямоугольника может быть частью стороны другого; нельзя лишь допустить точного совпадения сторон.

162.** Расположите 6 неочиненных карандашей так, чтобы каждые два из них прикасались друг к другу.

19. Развертки многогранников

Куб (рис. 37) – это многогранник. Многогранники мы видим ежедневно: спичечный коробок, книга, комната, многоэтажный панельный дом с плоской крышей – это

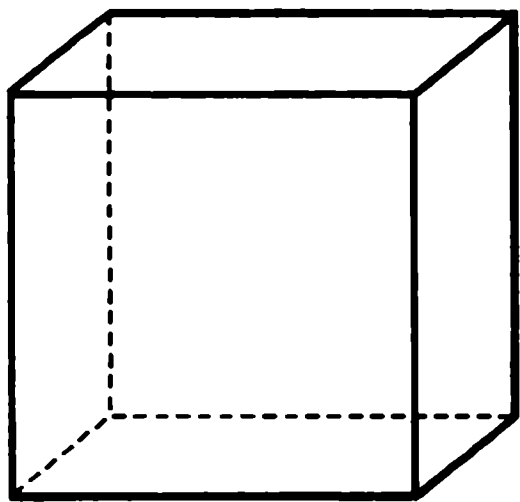


Рис. 37

*прямоугольные параллелепипеды; гра-
ненный карандаш – призма (впрочем,
параллелепипед – это тоже четырех-
угольная призма). Многие архитек-
турные сооружения или их детали
имеют форму пирамиды или усечен-
ной пирамиды – вспомните хотя бы
египетские пирамиды!*

*Многогранник – это часть про-
странства, ограниченная плоскими
многоугольниками – гранями. Сторо-
ны и вершины граней называют ребрами и вершинами
многогранника. Неформально говоря, о грань можно уда-
риться, о ребро – порезаться, о вершину – уколоться.*

163. Сколько у куба граней? Сколько ребер? А вершин?

164. Перечертите на клетчатую бумагу изображенную на рисунке 38 фигуру и вырежьте ее (сторона каждого квадрата – 4 см). Сверните из нее куб и склейте его. (Вырезанную фигуру¹² называют *разверткой* куба. Подумайте, почему она так названа.)

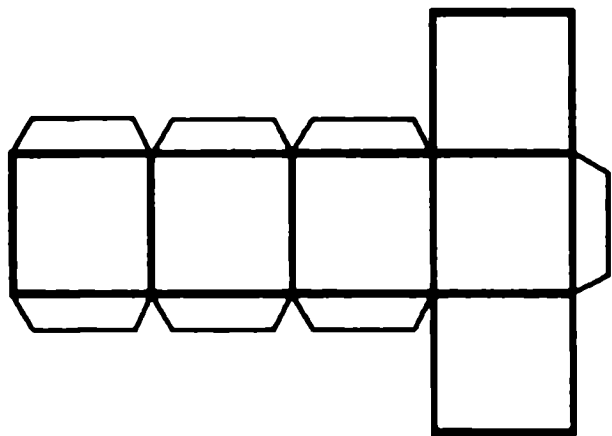


Рис. 38

*Если многогранную поверх-
ность после проведения несколь-
ких разрезов удалось развернуть
на плоскость, то получается раз-
вертка многогранника – плоский
многоугольник. Обычно разрезы
проводят по ребрам многогранни-
ка, и потому развертка состоит
из многоугольников – граней мно-
гогранника.*

*Например, здесь изображены развертки четы-
рех многогранников. Эти многогранники – прямоугольный
параллелепипед (рис. 39), правильный тетраэдр (рис. 40),*

¹² Для Придиры. Клапаны нужны, чтобы можно было склеить. К математическому понятию «развертка» они никакого отношения не имеют.

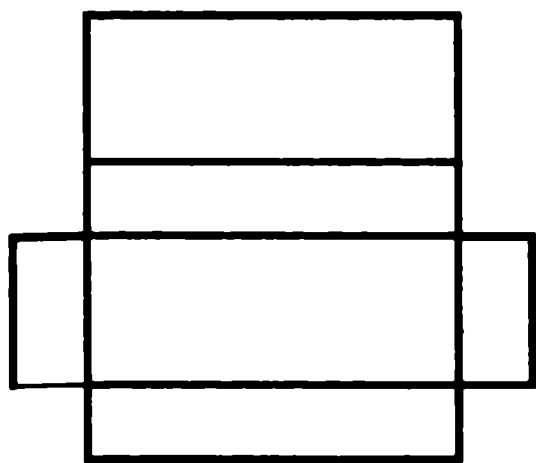


Рис. 39

правильная четырехугольная пирамида (рис.41) и октаэдр (рис.42).

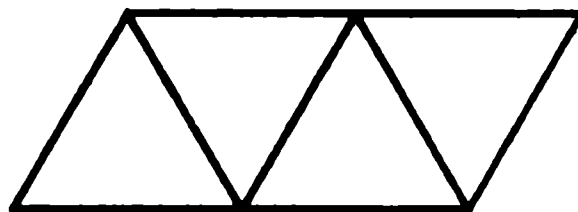


Рис. 40

По разверткам легко восстановить соответствующие многогранники; обычно указывают, какие именно пары сторон нужно склеить для получения исходного многогранника.

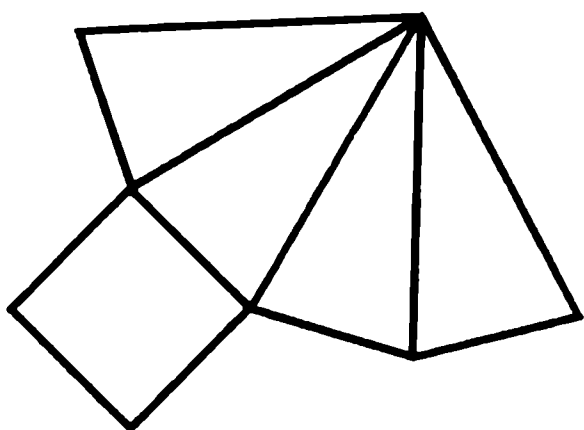


Рис. 41

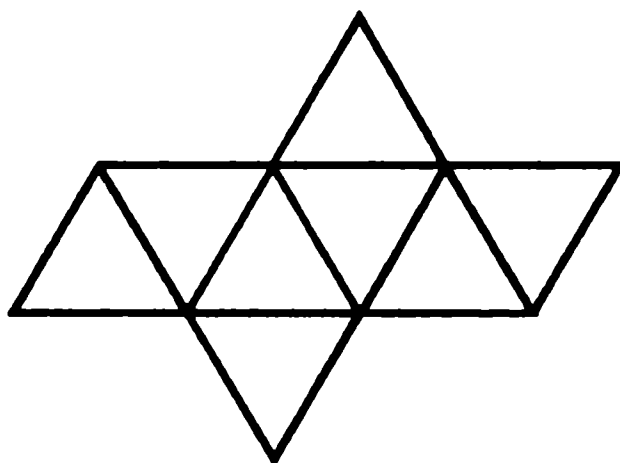


Рис. 42

165. а) Догадайтесь, как выглядят эти четыре многогранника, и нарисуйте их.

б) При помощи циркуля и линейки перенесите развертки на лист бумаги (лучше взять цветную бумагу), не забыв о клапанах, и склейте эти многогранники.

166. Сколько граней, вершин и ребер имеет а) n -угольная пирамида; б) n -угольная призма? (На рисунке 43 – пятиугольная пирамида, на рисунке 44 – пятиугольная призма.)

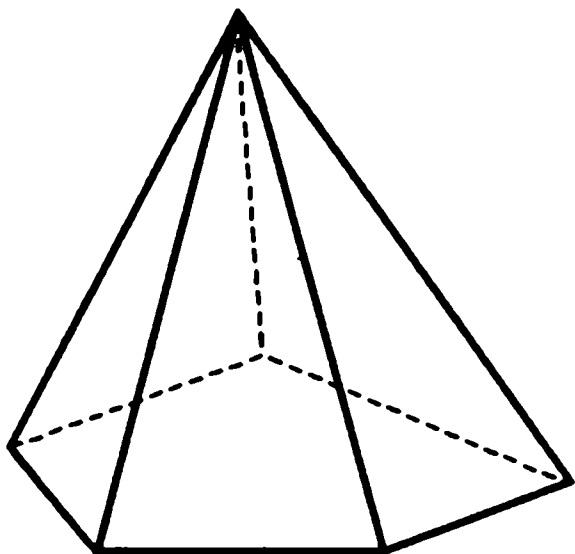


Рис. 43

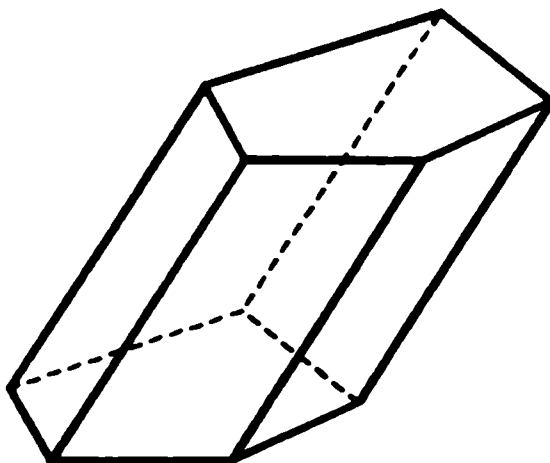


Рис. 44

167. Сколько граней у неочиненного шестигранного карандаша?

В стереометрии¹³ для облегчения восприятия условились изображать скрытые от взора наблюдателя линии пунктиром. Например, пирамиду можно изобразить так, как это сделано на рисунке 45, где

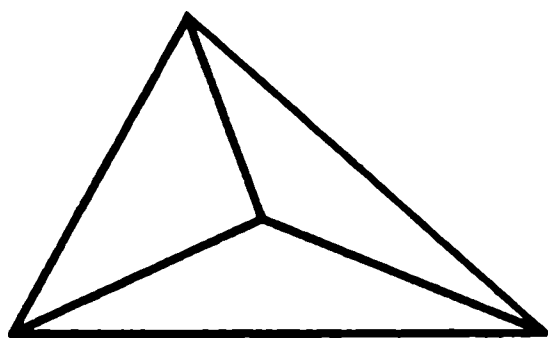


Рис. 45

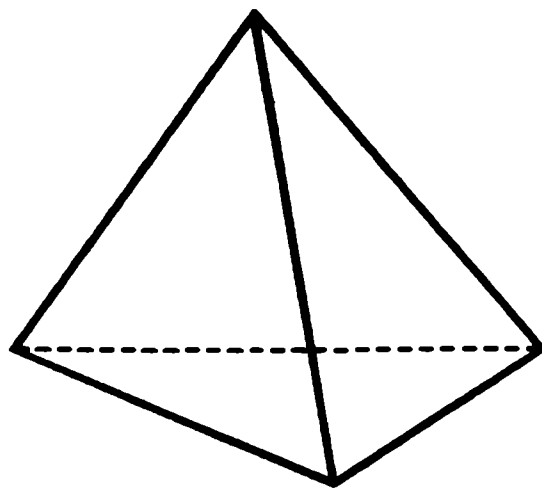


Рис. 46

все линии видимые, можно – как на рисунке 46, где есть невидимая (пунктирная) линия, но нельзя так, как это сделано на рисунке 47.

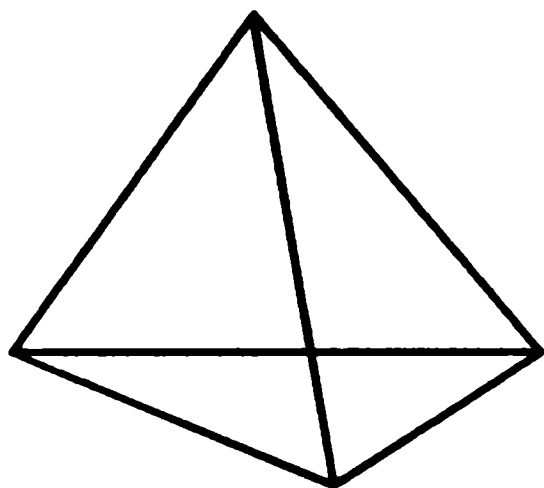


Рис. 47

Даже соблюдая все правила, можно столкнуться с неоднозначностью толкования плоских изображений пространственных объектов (рис. 48–50).

Многие художники изображали «невозможные объекты», которым не соответствуют никакие реальные пространственные тела, хотя не всегда сразу ясно, в чем дело.

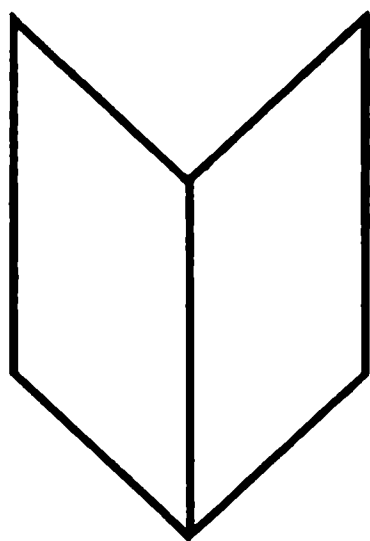


Рис. 48

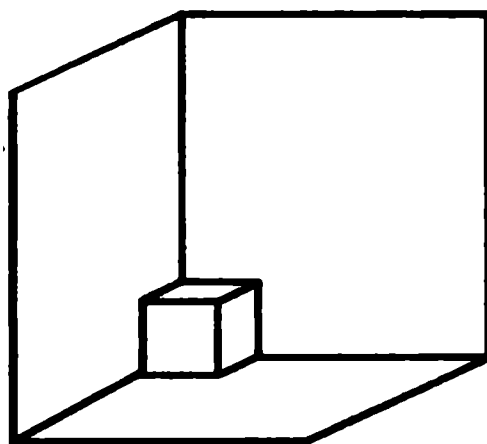


Рис. 49

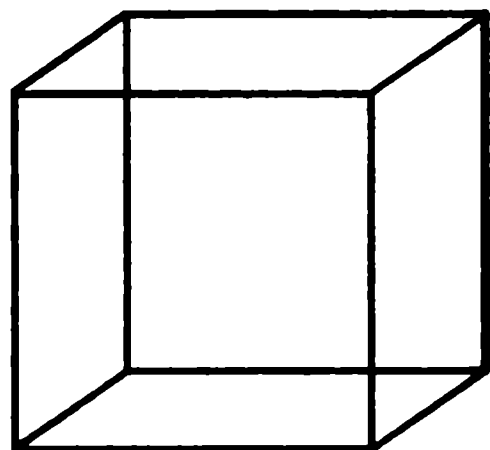


Рис. 50

¹³ Стереометрия – наука о пространстве, т.е. раздел геометрии, изучающий не плоские (двумерные) фигуры, а пространственные (трехмерные) тела.

Один и тот же многогранник может иметь несколько разных разверток. Например, правильный тетраэдр имеет, кроме изображенной на рисунке 40, еще развертку треугольной формы (рис. 51), которая даже более удобна

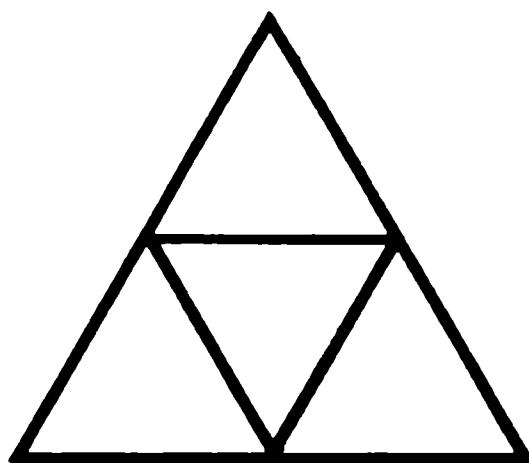


Рис. 51

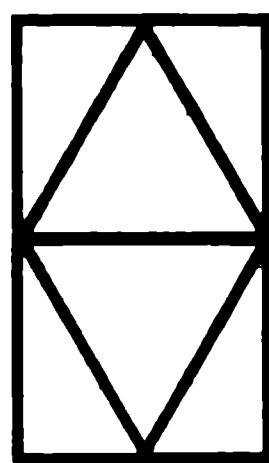


Рис. 52

для склейки: достаточно согнуть три угловых треугольника. А если резать не только по ребрам, то тот же тетраэдр имеет и развертку прямоугольной формы (рис. 52)!

168. Сколько ребер и сколько вершин имеет многогранник, развертка которого изображена на рисунке 53?

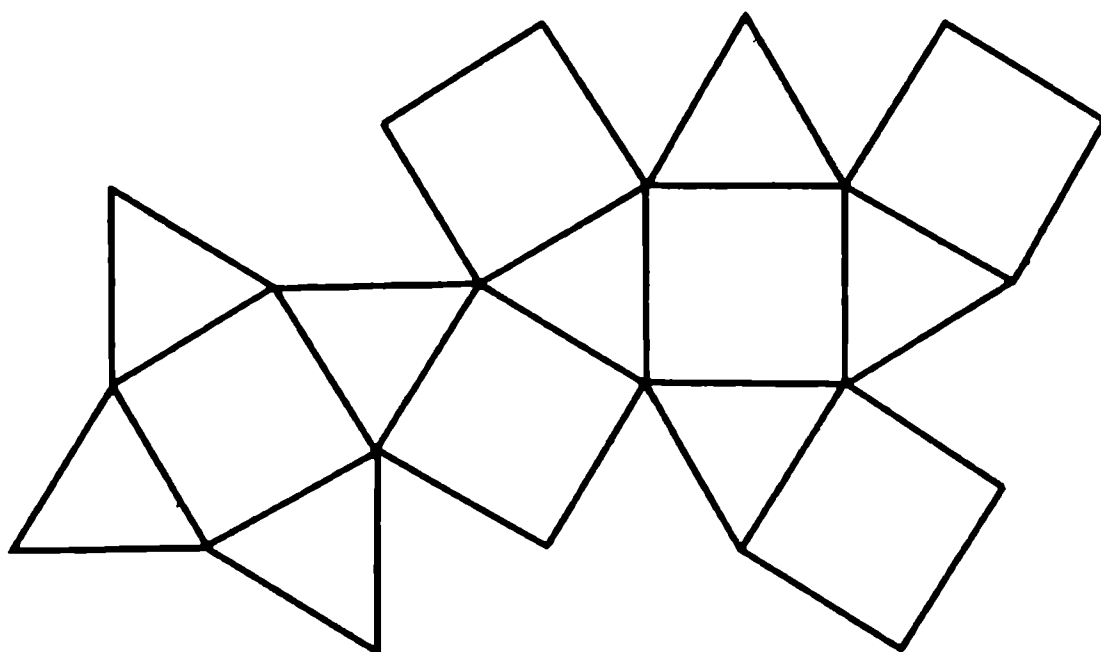


Рис. 53

169. Надрежьте поверхность куба, чтобы получилась развертка, изображенная на рисунке а) 54; б) 55.

Указание. Площадь поверхности куба равна площади его развертки. Поэтому площадь одной грани куба равна сумме площадей двух клеток.

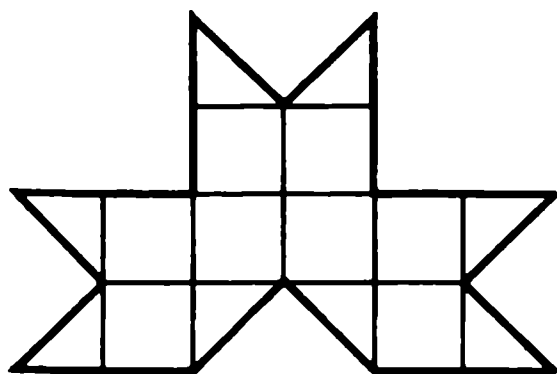


Рис. 54

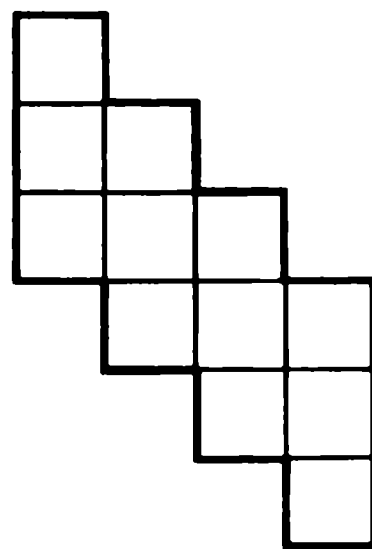


Рис. 55

170. Условимся верхнюю грань куба обозначать буквой В, нижнюю – Н, левую – Л, правую – П, заднюю – З, переднюю – Ф (от слова «фасад»). Расставьте на развертках куба (рис.56) буквы в соответствии с уже намеченными.

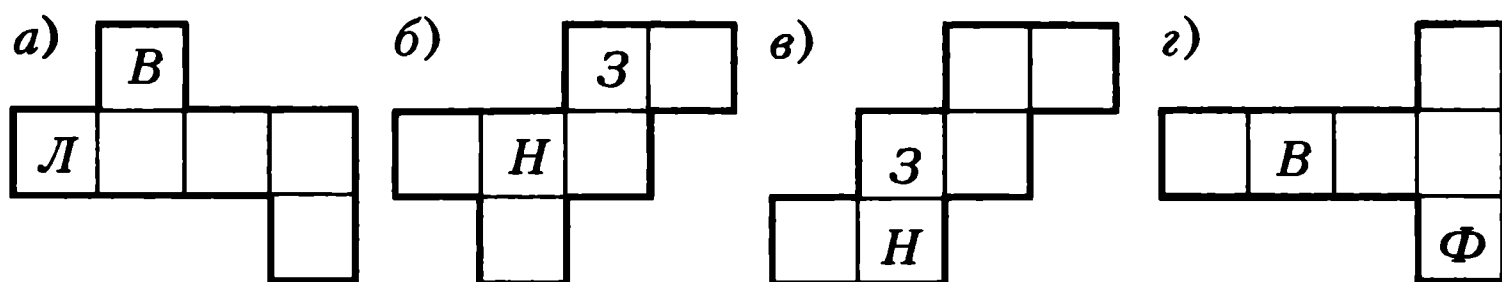
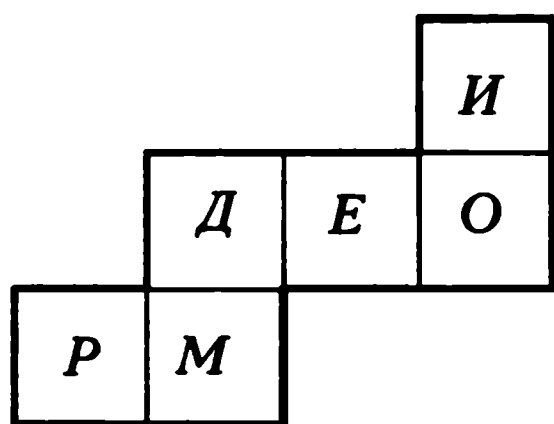


Рис. 56

171. На развертке куба надписаны буквы на гранях (рис.57). а) Запишите парами буквы противоположных (т.е. не имеющих общих ребер) граней:



(Д, _); (Р, _); (М, _). б) Какие грани соседствуют с гранью Д?

172. а) Какие из фигур рисунка 58 являются развертками куба? (Разрезы можно проводить только вдоль ребер.)

б*) Нарисуйте 11 разверток куба, которые можно получить, если проводить разрезы только вдоль ребер.

(Доказательство того, что других разверток нет, требует определенной усидчивости и ясности ума, но не требует никаких новых идей. Поэтому не тратьте на него время.)

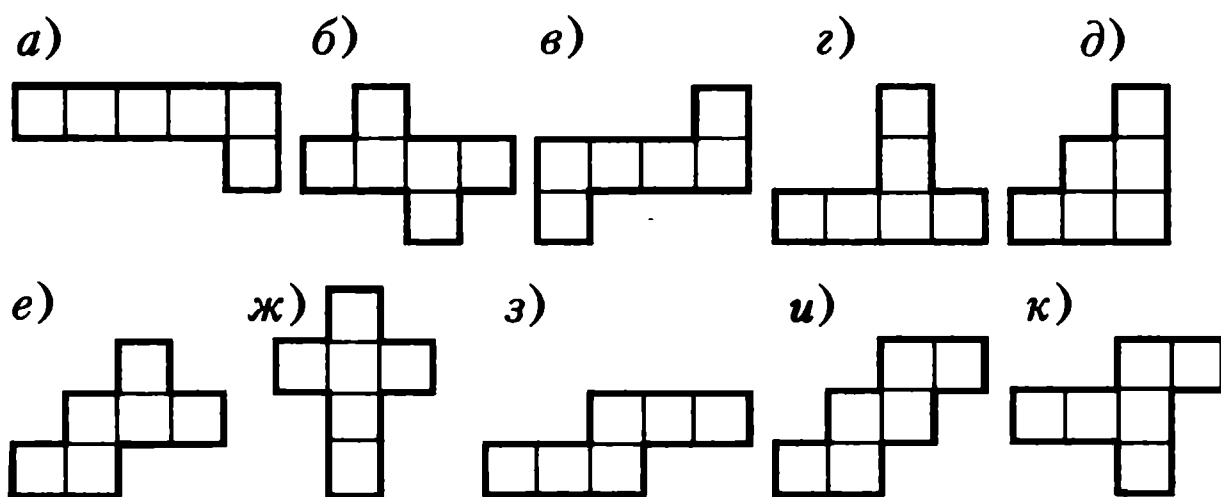


Рис. 58

Указание. Семь разверток можно найти на рисунке 58. Остальные четыре можно найти в условиях других задач. (А лучше – придумайте их самостоятельно!)

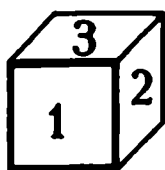


Рис. 59

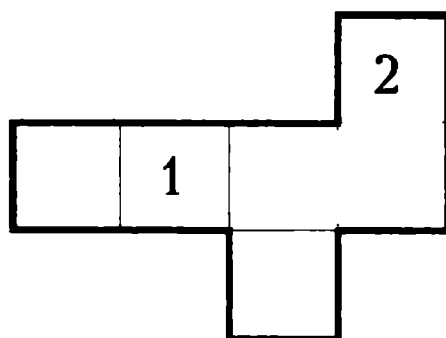
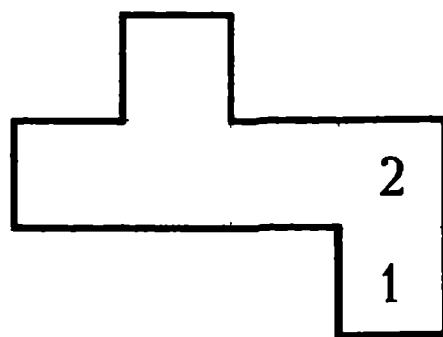


Рис. 60



173. На видимых гранях куба проставлены числа 1, 2 и 3 (рис.59). А на развертках этого куба (рис.60) указаны лишь числа 1 и 2. Расставьте на развертках числа 3, 4, 5 и 6 так, чтобы сумма чисел любых двух противоположных граней была равна 7.

174. Для двух кубиков сделали по три развертки и перемешали (рис.61). Определите, какие три соответствуют

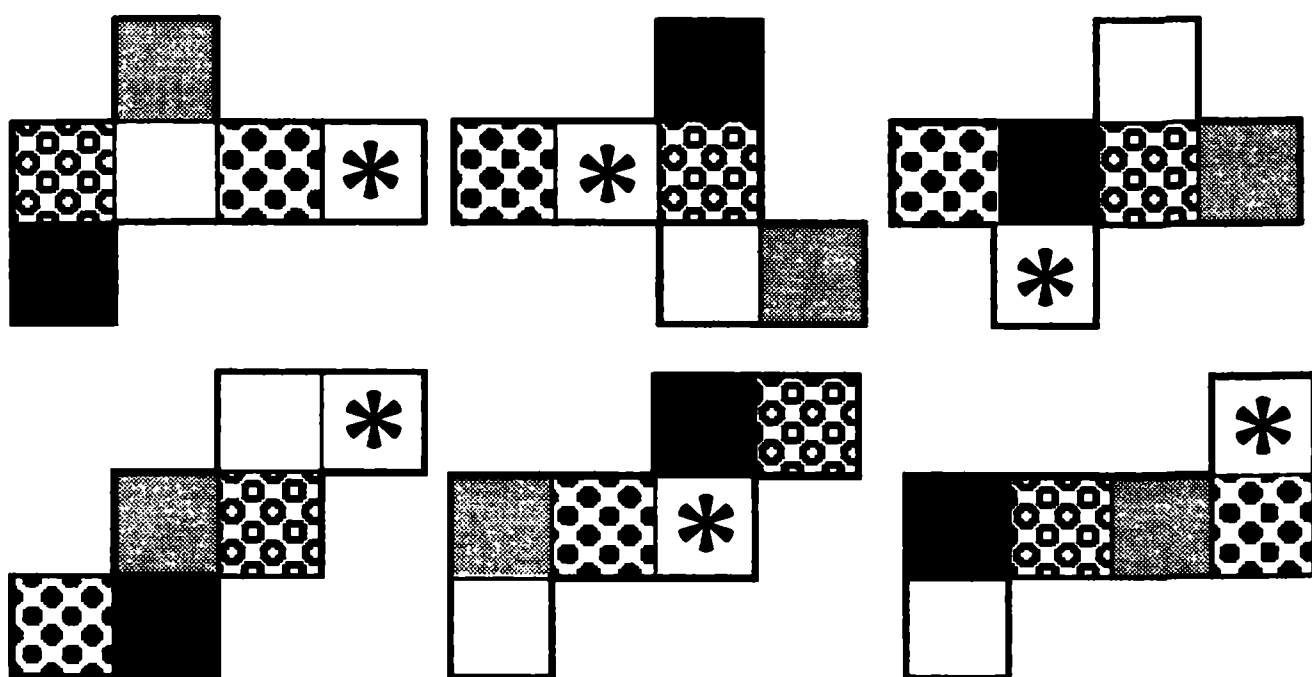


Рис. 61

одному кубику, а какие три – другому.

175. Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на рисунке 62. А если справа – то как на рисунке 63. Нарисуйте вид сверху.

Указание. Нарисуйте аквариум (т.е. параллелепипед $1 \times 1 \times 2$) и восстановите траекторию рыбки.

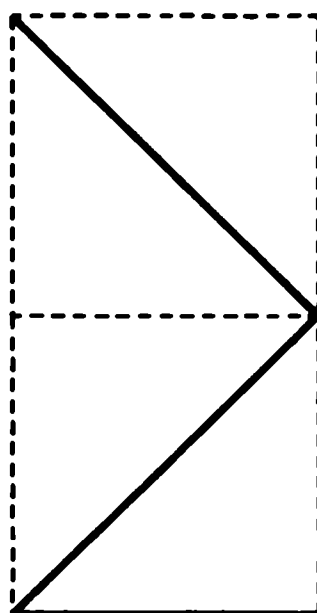


Рис. 62

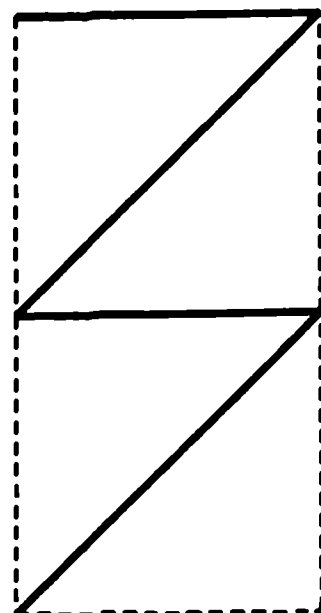


Рис. 63

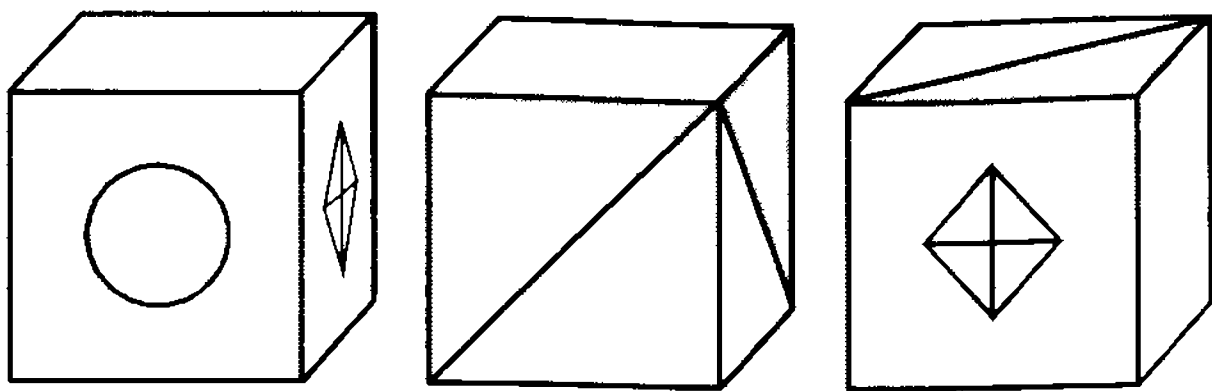


Рис. 64

176. Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трех различных положениях он выглядел, как показано на рисунке 64. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развертку.)

20. Расстановки скобок и знаков

Работая над решением задачи, всегда полезно знать ответ.

177. Расставьте знаки арифметических действий и скобки, чтобы получились верные равенства:

- а) $4\ 4\ 4\ 4 = 5$; б) $4\ 4\ 4\ 4 = 17$; в) $4\ 4\ 4\ 4 = 20$;
 г) $4\ 4\ 4\ 4 = 32$; д) $4\ 4\ 4\ 4 = 64$; е) $4\ 4\ 4\ 4 = 48$.

178. Используя ровно пять раз цифру 3, знаки действий и скобки, представьте любое целое число от 0 до 11.

Подсказка. $(3 - 3) \cdot 333 = 0$, $33 : 3 + 3 - 3 = 11$.

179. Используя цифру 7 четыре раза, знаки действий и скобки, представьте все числа от 0 до 10.

Подсказка. $77 - 77 = 0$, $(77 - 7) : 7 = 10$.

180. Расставьте в записи $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$ скобки, чтобы получилось а) число 50; б) наименьшее возможное число; в) наибольшее возможное число.

181. Ученик написал выражение $6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2$, значение которого равно 58, но забыл поставить скобки. Сделайте это за него.

182. Расставьте скобки, чтобы получилось верное равенство:

- а) $3248 : 16 - 3 \cdot 315 - 156 \cdot 2 = 600$;
 б) $350 - 15 \cdot 104 - 1428 : 14 = 320$;
 в) $1 - 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 1995$.

183. Между цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, написанными в указанном порядке, поставьте знаки сложения и умножения так, чтобы полученное выражение имело значение 100. (Ис-

пользовать скобки нельзя. Между любыми двумя соседними цифрами должен стоять знак «+» или «·».)

184. Пять двоек записаны в ряд. Вставляя между некоторыми из них знаки арифметических действий и скобки, можно получать различные числа. Например, $14 = (2 + 2 + 2) \cdot 2 + 2$. Можно ли получить число а) 9; б) 13; в) 113?

185. Расшифруйте «животноводческий» ребус: Б + БЕЕЕ = МУУУ.

186. Поставьте в клетках таблицы размером 4×4 десять минусов так, чтобы в каждой строке оказалось четное число минусов, а в каждом столбце – нечетное.

187. Расставьте крестики и нолики в квадрате 5×5 так, чтобы в каждой строке, кроме первой, крестиков было больше, чем ноликов, а в каждом столбце, кроме последнего, крестиков было меньше, чем ноликов.

21. Один сапфир и два топаза...

- Так это же известная задача!
- А как она решается?
- Да нет! Условие известное, а решения я не знаю.

188. Один сапфир и два топаза ценней, чем изумруд, в три раза. А семь сапфиров и топаз его ценнее в восемь раз. Определить прошу я вас, сапфир ценнее иль топаз?

189. Таня пошла покупать ручки и карандаши. На все деньги, которые у нее были, она могла купить 6 ручек. На те же деньги она могла купить 12 карандашей. Но она решила на все деньги купить одинаковое количество ручек и карандашей. Сколько?

190. У Ани, Мани, Тани, Вани и Дани яблок было поровну. Когда Аня, Маня и Таня съели по 5 яблок, у них вместе оказалось столько же яблок, сколько у Вани и Дани вместе. Сколько яблок у Вани?

191. Найдите восемь последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равняется сумме пяти последних.

192. Когда скворцы сели по одному на дерево, одному скворцу не хватило дерева, а когда на каждое дерево сели по два скворца, одно дерево осталось свободно. Сколько было скворцов?

193. В спортивном зале есть несколько одинаковых скамеек. Если спортсмены сядут по 6 человек на скамейку, то на последнюю скамейку сядут только 3 человека. Если же спортсмены будут

садиться по 5 человек на скамейку, то 4 спортсменам места не хватит. Сколько скамеек в спортивном зале?

194. Некоторое число уменьшили на 7 и потом уменьшили в 10 раз. Получили число, которое на 34 меньше исходного. Найдите исходное число.

195. Впишите в кружки рисунка 65 числа так, чтобы каждое следующее в направлении стрелок число получалось из предыдущего при помощи указанного действия.

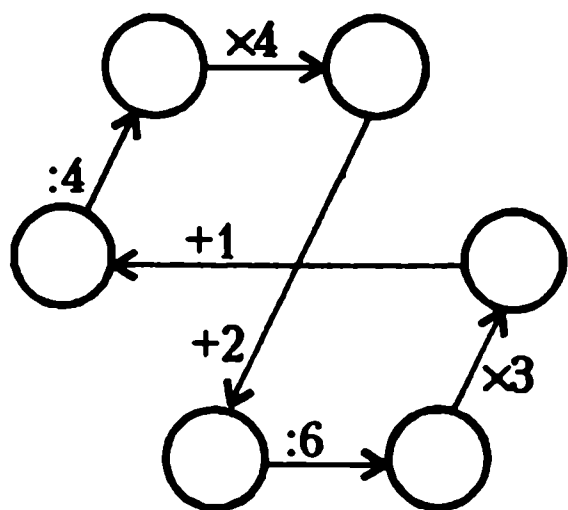


Рис. 65

196. Митя и Витя взвесили свои портфели. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда они положили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг.

– Разве два плюс три равно шести? – воскликнул Митя.

– У весов сдвинута шкала, – ответил Витя, – Они показывают вес,

который отличается на некоторую определенную величину от истинного.

Сколько весили портфели на самом деле?

197. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 26. Найдите уменьшаемое.

198. Один сказал другому: «Дай мне 2 сливы, тогда будет у нас слив поровну», – на что тот ответил: «Нет, лучше ты дай мне 2 сливы, – тогда у меня будет вдвое больше, чем у тебя». Сколько слив было у каждого?

199. У двух рыбаков спросили: «Сколько рыбы в ваших корзинах?» – «В моей корзине половина числа рыб, находящихся в корзине у него, да еще 10», – ответил первый. «А у меня в корзине столько рыб, сколько у него, да еще 20», – сказал второй. Сколько же у них рыб?

200. Турист проехал автобусом на 80 км больше, чем прошел пешком. Поездом он проехал на 120 км больше, чем автобусом. Какое расстояние он проехал автобусом, если поездом он преодолел в шесть раз большее расстояние, чем пешком?

200'. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x = y + 80, \\ z = x + 120, \\ z = 6y. \end{cases}$$

201. В парке живут воробьи, синицы, голуби и вороны – всего 10000 птиц. Воробьев в 10 раз больше, чем ворон; голубей на 400 больше, чем ворон; синиц на 1400 меньше, чем воробьев. Сколько каких птиц в парке?

202. Сумма двух чисел равна 180, частное от деления большего на меньшее равно 5. Найдите эти числа.

203. Разбейте число 186 на три не равных друг другу натуральных слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье.

204. Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

205. Найдите частное, если оно в 2 раза меньше делимого и в 6 раз больше делителя.

206*. Найдите два числа, если их сумма втрое больше их разности и вдвое меньше их произведения.

22. Наибольшее число, все цифры которого...

207. Найдите наибольшее натуральное число, а) все цифры которого различны; б) все цифры которого различны и которое кратно числу 4.

208. Найдите наименьшее четное число, в десятичной записи которого участвуют все цифры.

209. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 100, сумма цифр которого равна 100.

210. Найдите а) наибольшее; б) наименьшее такое натуральное число, что сумма его цифр равна 23, причем среди этих цифр нет ни одного нуля.

211. Из числа 1829 вычеркните одну цифру так, чтобы получилось наименьшее возможное число.

212. Из числа 382818 вычеркните две цифры так, чтобы получилось наибольшее возможное число.

213. Из числа 12345 12345 12345 12345 12345 вычеркните 10 цифр, чтобы осталось наименьшее возможное число.

214. Запишем в строку одно за другим натуральные числа от 1 до 60:

1234567891011121314151617...495051525354555657585960.
Вычеркните 100 цифр, чтобы оставшееся число было как можно а) большим; б) меньшим.

215. Можно ли, используя ровно один раз каждую из а) цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6, составить два натуральных числа, которые отличаются менее чем на 50; б) всех десяти цифр, составить два натуральных числа, которые отличаются менее чем на 250?

23. При составлении расписания...

216. При составлении расписания уроков на вторник трое преподавателей высказали пожелания, чтобы их уроки были: математика – 1-й или 2-й; история – 1-й или 3-й; литература – 2-й или 3-й. Сколькими способами и как при составлении расписания можно удовлетворить эти пожелания?

217. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

218. Разделите 7 полных, 7 пустых и 7 полупустых бочек меда между тремя купцами, чтобы всем досталось поровну и бочек, и меда. (Мед из бочки в бочку не переливать!)

219. На сковороде могут одновременно жариться две котлеты. Каждую надо обжарить с обеих сторон, причем для обжаривания одной стороны требуется 1 минута. За какое наименьшее время можно поджарить три котлеты?

220. На каждой клетке доски 4×4 лежит слива. Уберите 6 слив так, чтобы в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду осталось четное число слив.

221. Кузнец подковывает одно копыто за 5 минут. Лошадь не умеет стоять на двух ногах. а) Сколько времени потребуется 4 кузнецам, чтобы подковать 5 лошадей? б) За какое наименьшее время 48 кузнецов могут подковать 60 лошадей?

222. Составьте из красных, желтых и зеленых единичных кубиков куб $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы в любом бруске¹⁴ из трех кубиков все кубики были разного цвета.

223. Каждые два из 6 блоков компьютера соединены проводом.¹⁵ Покрасьте каждый из этих проводов в один из 5 цветов так, чтобы от каждого блока отходило 5 проводов разного цвета.

¹⁴ Размера $1 \times 1 \times 3$. Таких брусков (по-разному ориентированных) всего 27 штук.

¹⁵ Всего – 15 проводов.

То, что уже открыто, часто кажется очень простым... Но поиск, идущий в темноте и длящийся годами, при котором на смену уверенности приходит отчаяние, при котором следуют бесконечные прорывы к ясности, — все это знает лишь тот, кто прошел этот путь.

А.Эйнштейн

224°. В поединке любых двух из девяти борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Разбейте борцов по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая над третьей, а третья — над первой.

24. Книга стоит рубль и половину своей стоимости

Половину из вас я знаю вполнину хуже, чем хотел бы, а другую половину люблю вполнину меньше, чем она того заслуживает.

Бильбо Бэггинс

225. Книга стоит 1 рубль и еще половину своей стоимости. Сколько она стоит?

226. На одну чашку весов положили круг сыра, а на другую — $3/4$ такого же круга и еще килограммовую гирю. Установилось равновесие. Сколько весит круг сыра?

227. Матч между «Спартак» и «Динамо» закончился со счетом 23:21 в пользу «Спартак». В матче был момент, когда «Спартак» уже забросил столько мячей, сколько «Динамо» осталось забросить. Сколько мячей к этому моменту было заброшено обеими командами вместе?

228. За книгу заплатили рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит книга?

229°. Если головоломка, разгаданная перед тем, как разгадали эту, была труднее, чем головоломка, которую разгадали после того, как разгадали головоломку, которую разгадали перед тем, как разгадали эту, то была ли головоломка, которую разгадали перед тем, как разгадали эту, труднее, чем эта?

229'. «Когда послезавтра станет вчера, — сказала Кикимора, — то сегодня будет столь же далеко от воскресенья, как и тот день, который был сегодня, когда позавчера было завтра.» В какой день недели была произнесена эта загадочная фраза?

230. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате число мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным числу девочек, ее не решивших. Кого в классе больше: учеников, решивших задачу, или девочек?

231. Каждый участник шахматного турнира выиграл белыми столько же партий, сколько все остальные черными. Докажите, что все участники одержали одинаковое количество побед.

231'. Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные вместе – во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.

24. Логика

Преподаватель: «Не могу не заметить, что мне так и не удалось объяснить Вам смысл отрицания, поэтому я не стану утомлять Вас повторением».

Студент: «Я понял все сказанное и признателен Вам за готовность перейти к новому материалу».

232. В тетради написано 100 утверждений:
В этой тетради ровно одно ложное утверждение.
В этой тетради ровно два ложных утверждения.

.....
В этой тетради ровно сто ложных утверждений.
Какое из этих утверждений верно?

233. За сутки до дождя петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь», – подумал Петя. Прав ли он?

234. Рядом сидят мальчик и девочка.

– Я мальчик, – говорит черноволосый ребенок.

– Я девочка, – говорит рыжий ребенок.

Если хотя бы кто-то из них врет, кто мальчик, а кто – девочка?

235. – У Вовы больше тысячи книг, – сказал Ваня.

– Нет, книг у него меньше тысячи, – возразила Аня.

– Одна-то книга у него наверняка есть, – сказала Маня.

Если истинно только одно из этих утверждений, сколько книг у Вовы?

Предупреждение. Если думаете, что у Вовы нет ни одной книги, то ошибаетесь! И если думаете, что у Вовы 1000 книг, то тоже ошибаетесь!! Сформулировать ответ в этой задаче не так легко, как могло показаться на первый взгляд!!!

236. Три человека А, В и С пересчитали кучу шариков четырех цветов. Каждый из них правильно различал два цвета, а два других

не различал. Кто-то один из них не различал красный и оранжевый, другой не различал оранжевый и желтый, а еще один не различал желтый и зеленый. Глядя на таблицу, узнайте, сколько каких шариков было.

	Красный	Оранжевый	Желтый	Зеленый
<i>A</i>	2	5	7	9
<i>B</i>	2	4	9	8
<i>C</i>	4	2	8	9

237. Один из попугаев *A*, *B*, *C* всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий хитрец – иногда говорит правду, иногда врет. На вопрос «Кто *B*?» они ответили:

- A*: – Лжец.
 - B*: – Я хитрец!
 - C*: – Абсолютно честный попугай.
- Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

238. До царя дошла весть, что кто-то из трех богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:

- Илья Муромец*: – Змея убил Добрыня Никитич.
- Добрыня Никитич*: – Змея убил Алеша Попович.
- Алеша Попович*: – Я убил змея.

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

239. Четверо ребят – Алеша, Боря, Ваня и Гриша – соревновались в беге. На следующий день они заявили:

- Алеша*: – Я не был ни первым, ни последним.
- Боря*: – Я не был последним.
- Ваня*: – Я был первым.
- Гриша*: – Я был последним.

Известно, что трое сказали правду, а один соврал. Кто был первым? Кто сказал неправду?

240. Встретились три друга: Белов, Чернов и Рыжов. «Волосы одного из нас белые, другого – черные, третьего –

	Белые	Черные	Рыжие
Белов	–		
Чернов		–	
Рыжов			–

рыжие, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии», — заметил черноволосый. «Ты прав», — подтвердил Белов. Какие у кого волосы?

Указание. В таблице знаками «-» отмечено, что ни у кого цвет волос не соответствует фамилии. Догадайтесь, для чего в условии сказано, что Белов подтвердил слова черноволосого.

241. В трех ящиках находятся: мука, крупа и сахар. На первом написано «Крупа», на втором — «Мука», на третьем — «Крупа или сахар». Известно, что содержимое ни одного из ящиков не соответствует надписи на нем. Где что находится?

242. Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зеленой рубашках. Их туфли были тех же трех цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зеленые, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашки у Бома и Бима?

243. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

244. На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Надя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом и ВалеЙ. Кто какое платье носит?

245. В конференции участвовало 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника, и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервали. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

26. Замостите плоскость!

246. На рисунке 66 показано, как плоскость можно замостить «скобками», состоящими из шести клеток

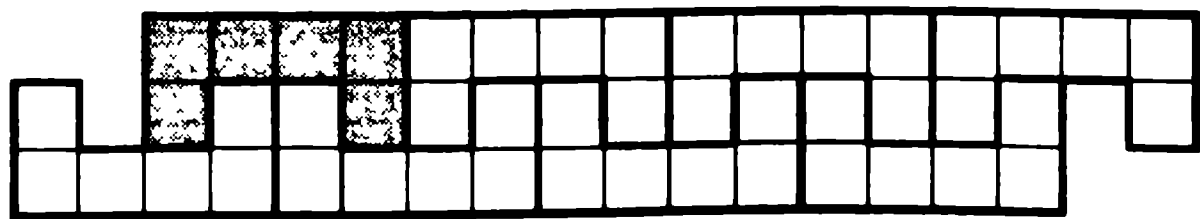


Рис. 66

каждая. Замостите плоскость

а) крестиками (рис. 67, а),

б) крестами (рис. 67, б),

в) скобками (рис. 67, в.).¹⁶

247*. На рисунке 68 показано, как копиями развертки куба можно замостить плоскость. Проверьте, что копиями любой из десяти других разверток куба, изображенных на рисунке 69, тоже можно замостить плоскость.

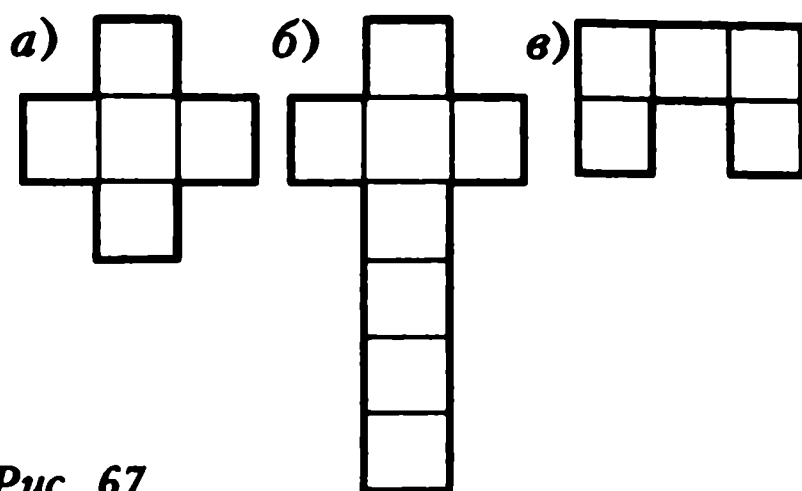


Рис. 67

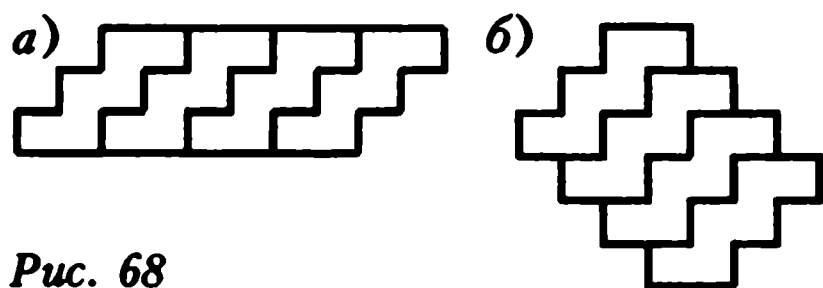


Рис. 68

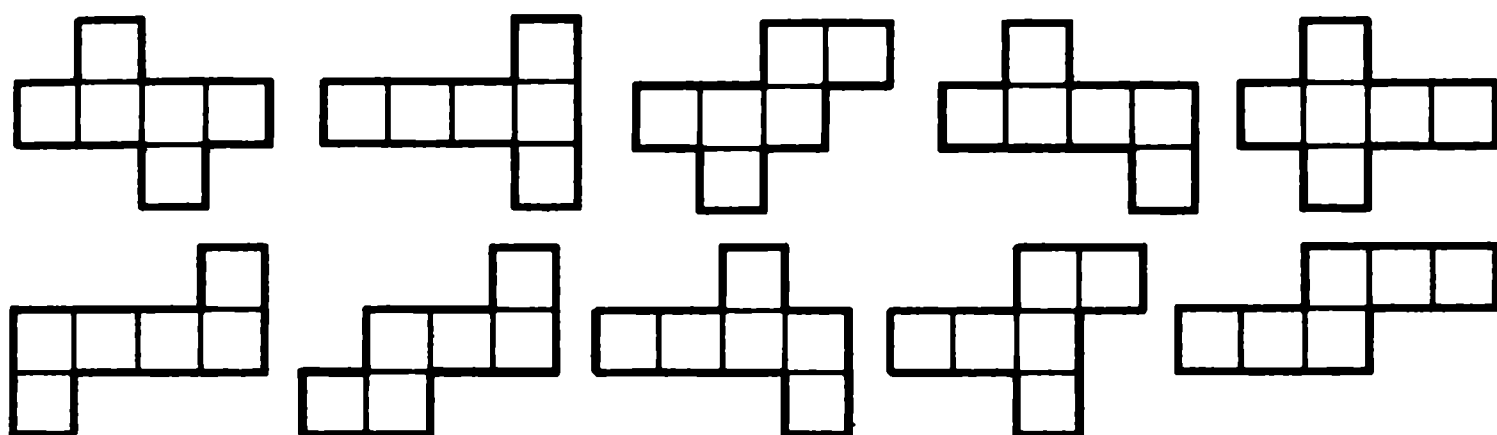


Рис. 69

248. Замостите плоскость одинаковыми

а) 5-угольниками; б) 7-угольниками; в) 9-угольниками.

27. Деревянный куб покрасили и распилили...

249. Деревянный куб покрасили, а затем распилили на маленькие кубики, ребра которых в 5 раз меньше, чем у исходного куба (рис. 70). Получилось $5^3 = 125$ маленьких кубиков. У скольких кубиков оказались окрашены а) три

¹⁶ Плоскость – это «бесконечный лист бумаги». Разумеется, недостаточно заполнить тетрадную страницу – нужно придумать разбиение, неограниченно продолжаемое во все стороны.

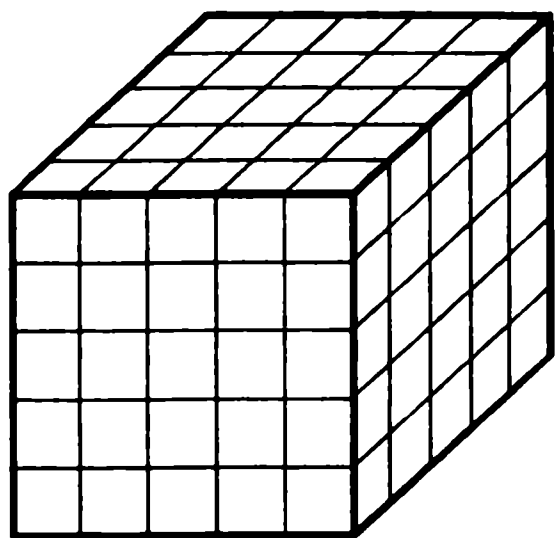


Рис. 70

грани; б) две грани; в) только одна грань? г) Сколько осталось вовсе неокрашенных кубиков?

250. Прямоугольный параллелепипед, длина которого 4 см, ширина – 3 см, высота – 2 см, покрасили со всех сторон и разрезали на «кубические сантиметры». У скольких из них оказалась окрашена а) одна грань; б) две грани; в) три грани?

251. Из куба $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный кубик и восемь угловых. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размера $3 \times 1 \times 1$?

252. а) Из шести отдельных кубиков $1 \times 1 \times 1$ и семи «уголков», каждый из которых склеен из трех кубиков $1 \times 1 \times 1$, составьте куб $3 \times 3 \times 3$. б) Можно ли это сделать так, чтобы все шесть отдельных кубиков оказались в центрах граней большого куба?

253. Вычислите:

а) $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 93 - 95 + 97 - 99$;

б) $1000000 - (1000000 - (1000000 - (1000000 - (1000000 - 999999))))$.

28. ... цифра десятков больше цифры единиц?

254. а) Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц? б) Сколько двузначных чисел, у которых цифра десятков меньше цифры единиц?

255. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

256*. Все натуральные числа от 1 до 999 разбиты на две группы: четные и нечетные числа. Определите, в какой из групп сумма цифр больше и на сколько. (Каждая цифра учитывается столько раз, сколько раз она была использована.)

257. Числа 1, 2, 3, ..., 1965, 1966 разбили на два множества: числа с нечетной суммой цифр и числа с четной суммой цифр. Что больше: сумма всех чисел первого множества или сумма всех чисел второго?

29. Сколько страниц в книге?

258. Для нумерации страниц в книге потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц в книге? (Хотя это и противоречит типографским традициям, считайте, что нумерация начинается с первой страницы.)

259. Выписаны подряд все натуральные числа:

1234567891011121314151617181920...

Какая цифра стоит на 1991-м месте?

260*. В строку записали подряд все числа от 1 до 1000:

123456789101112131415161718192021...9979989991000.

а) Сколько цифр в получившемся числе?

б) Сколько раз в его записи использовали цифру 3?

30. Встретились три охотника...

...всякая задача кажется очень простой после того, как вам ее растолкуют.

Шерлок Холмс

261. Встретились три охотника и сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй одну, а у третьего крупы не было. Но зато он дал товарищам 5 патронов в качестве платы за кашу. Все ели поровну. Как следует разделить патроны между первым и вторым охотниками?

262. У Ивана было 3 лепешки, а у Петра – 4. Прохожий присоединился к их трапезе, заплатив 7 копеек. Все ели поровну. Как следует распределить деньги между Петром и Иваном?

263. Пять братьев делили наследство отца поровну. В наследстве было три дома. Поскольку дома пилить нельзя, их взяли три старших брата, а меньшим выделили деньги: каждый из трех старших братьев заплатил по 800 рублей, а меньшие братья разделили эти деньги между собой. Сколько стоил один дом?

31. Поставьте знаки сложения...

264. В записи 5 5 5 5 поставьте между некоторыми цифрами знаки сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно а) 20; б) 110; в) 560.

265. В записи 8 8 8 8 8 8 8 8 поставьте между некоторыми цифрами знак сложения, чтобы сумма оказалась равна 1000.

266. Записаны подряд 20 пятерок: 5 5 5... 5 5. Поставьте между некоторыми цифрами знак сложения, чтобы сумма оказалась равна 1000.

32. Дроби

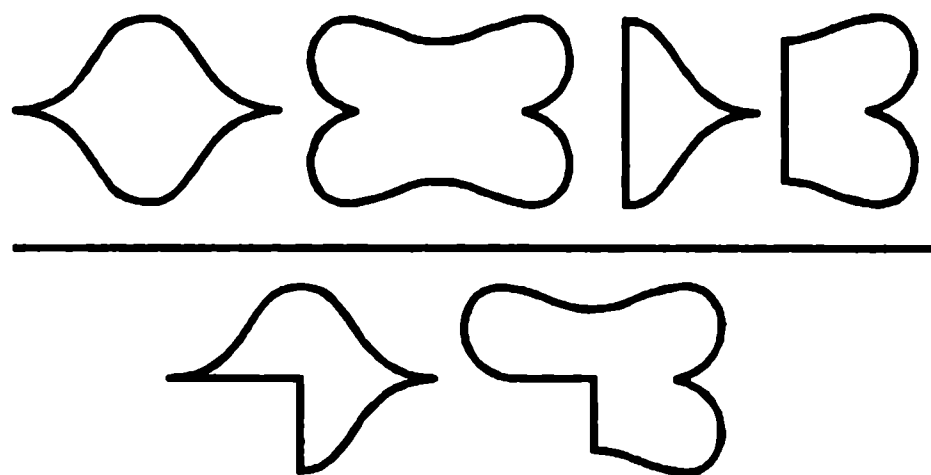
Из двух полоумных не сделаешь одного умного.

В.Ключевский

267. Может ли а) сумма; б) произведение двух нецелых чисел быть целым числом?

268. Который сейчас час, если оставшаяся часть суток вдвое больше прошедшей?

269. То да это да половина того да этого – во сколько раз больше, чем три четверти того да этого (рис.71)?



270*. Решите ребус

	СЛОВ,О
+	СЛОВ,О
<hr/>	
	ПЕСНЯ

Рис. 71

271. Коля задумал число. Сумма одной трети этого числа и одной четверти этого числа равна 21. Какое число задумал Коля?

271'. Решите уравнение

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 21.$$

272. У Вити на дне рождения было 5 друзей. Первому он отрезал $\frac{1}{6}$ часть пирога, второму – $\frac{1}{5}$ остатка, третьему – $\frac{1}{4}$ нового остатка, четвертому – $\frac{1}{3}$ оставшегося к этому моменту. Последний кусок Витя разделил пополам с пятым другом. Кому достался самый большой кусок?

Указание. Вообразите, что торт состоит из 6 одинаковых кусков.

273. У Тани и Димы денег поровну. Какую часть денег должна Таня отдать Диме, чтобы у него стало в два раза больше, чем у нее?

274. Придумайте правильную несократимую дробь, величина которой не меняется от прибавления к числителю числа

30, а к знаменателю – 40. (Т. е. придумайте такие взаимно простые натуральные числа x и y , что $\frac{x}{y} = \frac{x+30}{y+40}$.)

275. Числитель и знаменатель некоторой дроби – натуральные числа. Могло ли значение дроби увеличиться от того, что ее числитель увеличили на 1, а знаменатель – на 10?

276*. Может ли сумма двух несократимых дробей, имеющих разные знаменатели, большие числа 100, оказаться равна дроби, знаменатель которой меньше 100?

277. Двумя разными способами замените звездочки цифрами, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{5}{*} - \frac{*}{3} = \frac{1}{6}.$$

278. Замените звездочку арифметическим знаком так, чтобы получилось верное равенство:

$$\text{а) } \frac{33}{40} * \frac{10}{11} = 0,75; \quad \text{б) } 0,375 * \frac{1}{40} = 0,4; \quad \text{в) } 0,45 * \frac{1}{20} = \frac{2}{5}.$$

279. Что больше: $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ или $\frac{3}{6} - \frac{8}{12} + \frac{5}{25}$?

280. Слава взял у товарища книгу на 3 дня. В первый день он прочитал половину книги; во второй – треть оставшихся страниц; а количество страниц, прочитанных в третий день, было равно половине числа страниц, прочитанных в первые два дня. Успел ли Слава прочитать книгу?

281. Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно и смотрел до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, что он проехал, смотря в окно. Какую часть всего пути пассажир смотрел в окно?

282. В мешке 24 кг гвоздей. Как на чашечных весах без гирь и без стрелки отмерить 9 кг гвоздей?

282'. Отрежьте от шнура длиной $2\frac{2}{3}$ метра кусок длиной полметра, не имея под руками метра.

283. Разделите пять яблок поровну между шестью детьми, не разрезав никакое яблоко больше чем на три части.

284. Я отпил $\frac{1}{6}$ чашечки кофе и долил ее молоком. Затем выпил $\frac{1}{3}$ чашечки и долил ее молоком. Потом я выпил полчашечки и опять долил ее молоком. Наконец, я выпил полную чашечку. Чего я выпил больше: кофе или молока?

285. Решите уравнения:

$$\text{а) } 2 + \frac{180}{x-11} = 22; \quad \text{б) } \frac{16,04}{1,344} = \frac{y-5}{26,88}.$$

286. Известно, что дробь $(a - b)/(a + b)$ сократима, причем a и b – целые числа. Обязательно ли сократима дробь a/b ?

287. Сравните значения выражений $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ и $\frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9}$, не выполняя сложения.

288. Вычислите:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}$.

289. Придумайте четыре обыкновенные правильные несократимые дроби, знаменатели которых различны, а сумма равна 3.

290. На 22 карточках написаны натуральные числа 1, 2, ..., 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Могут ли 10 из этих дробей иметь целые значения?

Чтобы сравнить две дроби, обычно приводят их к одному знаменателю и после этого сравнивают числители. Но иногда удобно приводить не к общему знаменателю, а к общему числителю.

291. Устно выясните, какая из двух дробей больше:

$$\frac{23}{37} \text{ или } \frac{115}{187}?$$

33. Ряд Фарей

Удивительно красивые закономерности возникают иногда там, где их совершенно не ожидаешь встретить. Например, выписав в порядке возрастания несократимые правильные дроби, знаменатели которых не превосходят некоторого заданного числа N , мы получаем N -й ряд Фарей:

1) $\frac{0}{1} < \frac{1}{1}$;

2) $\frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$;

3) $\frac{0}{1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1}$;

4) $\frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$;

5) $\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$.

На первый взгляд, в этих рядах нет ничего интересного. Но посмотрим внимательнее. Следующий, 6-й ряд Фарея отличается от 5-го тем, что добавляются дроби $1/6$ и $5/6$ (все другие правильные дроби со знаменателем 6 сократимы: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$).

Гораздо больше новых дробей появляется в 7-м ряде Фарея:

$$\begin{aligned} \frac{0}{1} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \\ < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{1}{1}. \end{aligned}$$

292. а) Какие новые дроби появляются в 8-м ряде Фарея?

б) Выпишите 8-й и 9-й ряды Фарея.

293. Выпишите 12-й ряд Фарея.

Если вы действительно решили задачу 293, а не просто посмотрели в ответ, то, должно быть, заметили, что дроби, равноотстоящие от краев ряда Фарея, имеют одинаковые знаменатели (например, в 5-м ряде Фарея симметрично расположены относительно $1/2$ следующие пары

дробей: $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$). Более того, симметрично расположенные дроби дополняют одна другую до единицы (т.е. их сумма равна числу 1). Объяснение этому простое: если $x < y$, то $1 - x > 1 - y$.

294. а) Выпишите 13-й ряд Фарея. б) Для каждой из дробей $1/13$, $2/13$, ..., $12/13$ посмотрите, между какими дробями 12-го ряда Фарея она заключена, и сформулируйте закономерность.

Оказывается, верны следующие законы Фарея:

• если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ — две последовательные дроби ряда Фарея, то

$$bc = ad + 1.$$

• если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ — три последовательные дроби ряда Фарея, то

$$\frac{c}{d} = \frac{a + e}{b + f}.$$

Доказательства этих законов требуют владения методом индукции, поэтому мы отложим их на будущее. А пока ограничимся следующей задачей, разъясняющей, откуда

появляется выражение $(a + e)/(b + f)$ – медианта дробей a/b и e/f .

295. Если a, b, e, f – положительные числа и если $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$, то значение дроби $(a + e)/(b + f)$ заключено между a/b и e/f . Докажите это.

34. Свойства арифметических действий

Учитель: «Сколько будет два плюс три?»

Первоклассник: «Поскольку сложение коммутативно, будет три плюс два».

Эпиграф – не анекдот про Вовочку и Марию Ивановну, а обыденный эпизод. Правда, не российской, а французской школы: во Франции свойства арифметических действий изучают раньше, чем сами эти действия; тамошнему первокласснику даже не приходит в голову посчитать $2 + 3$.

Не придавая столь большого значения умению произносить умные слова, сформулирую основные свойства арифметических операций:

Коммутативность¹⁷, или переместительный закон сложения. Сумма не зависит от порядка слагаемых:

$$a + b = b + a.$$

Коммутативность, или переместительный закон умножения. Произведение не зависит от порядка множителей:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Ассоциативность¹⁸, или сочетательный закон сложения. Сумма трех слагаемых не зависит от порядка выполнения действий:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Ассоциативность, или сочетательный закон умножения. Произведение трех множителей не зависит от порядка выполнения действий:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

296. Используя коммутативность и ассоциативность, устно вычислите:

¹⁷ Commutativus (лат.) – меняющий(ся). Термин «коммутативный» ввел Ф.Сервуа в 1815 году.

¹⁸ Assotiatio (лат.) – соединение. Термин «ассоциативный» ввел У.Гамильтон в 1843 году.

а) $\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}$;

б) $\frac{3}{5} + 3\frac{3}{4} + 1\frac{2}{5} + 1\frac{1}{4}$;

в) $1,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 3$;

г) $3,2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 5 \cdot 6$;

д) $3\frac{2}{5} \cdot 2\frac{3}{7} \cdot 5 \cdot 7$;

е) $2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 4 \cdot 7$;

ж) $5,3 + 4,25 - 2,3 + 0,75$;

з) $4,7 - 2,13 + 5,3 - 2,87$;

и) $12 \cdot 12\frac{1}{2} \cdot 54$;

к) $42\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 - 17 \cdot 60$.

Дистрибутивность¹⁹, или **распределительный закон**, связывает операции сложения и умножения и позволяет раскрывать скобки:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Верны и многие другие формулы, например,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

297. Вычислите устно, используя дистрибутивность:

а) $1,64 \cdot 5,2 + 3,36 \cdot 5,2$;

б) $3,81 \cdot 4,3 + 6,19 \cdot 4,3$;

в) $\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot 4$;

г) $\left(4 - \frac{3}{10} - \frac{1}{5}\right) \cdot 10$;

д) $4\frac{3}{5} \cdot 2\frac{3}{7} + 2,4 \cdot \frac{17}{7}$;

е) $6\frac{2}{11} \cdot 5\frac{1}{8} + 1\frac{9}{11} \cdot 5,125$;

ж) $5,32 \cdot 4,2 - 3,32 \cdot 4,2$;

з) $6,71 \cdot 2\frac{4}{5} - 4,71 \cdot 2 \cdot 1,4$;

и) $\left(2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot 6$;

к) $15 \cdot \left(3 - \frac{3}{5} + 0,4\right)$.

298. Вычислите устно:

а) $354 \cdot 73 + 23 \cdot 25 + 354 \cdot 27 + 17 \cdot 25$;

б) $26 \cdot 25 - 25 \cdot 24 + 24 \cdot 23 - 23 \cdot 22 + 22 \cdot 21 - 21 \cdot 20 + 20 \cdot 19 - 19 \cdot 18 + 18 \cdot 17 - 17 \cdot 16 + 16 \cdot 15 - 15 \cdot 14$.

Имея дело со смешанными дробями, при вычислениях чаще всего необходимо заменять их на обыкновенные дроби.

Например, вместо $4\frac{7}{50}$ лучше иметь дело с дробью $\frac{207}{50}$.

Впрочем, иногда удобнее действовать по-другому...

¹⁹ Distributivus (лат.) – распределительный. Термин «дистрибутивный» ввел Ф.Сервуа в 1815 году.

299. Устно (это очень важно!) выполните действия:

а) $2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{2} + 4\frac{3}{10}$;

б) $5\frac{7}{8} - 2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2}$;

в) $6\frac{7}{12} \cdot 6 + 5\frac{1}{10} \cdot 5$;

г) $4\frac{11}{15} \cdot 5 + 3\frac{7}{9} \cdot 3$;

д) $\frac{7}{18} + 3\frac{1}{6} - 5\frac{11}{12}$;

е) $\frac{14}{15} - 6\frac{5}{6} + 2\frac{7}{9}$;

ж) $14\frac{7}{12} : 7 - 9\frac{3}{4} : 9$;

з) $16\frac{8}{15} : 8 - 10\frac{2}{3} : 10$;

и) $3\frac{3}{4} \cdot 23 - 8\frac{16}{25} \cdot 58$;

к) $5\frac{5}{6} \cdot 35 - 7\frac{7}{22} \cdot \frac{6}{7}$.

300. Догадавшись, какое действие лучше выполнить сначала, посчитайте устно:

а) $\left(12\frac{2}{9} + 24\frac{2}{3} - 16\frac{2}{15}\right) : 2$; б) $\left(12\frac{3}{7} - 18\frac{3}{14} + 15\frac{3}{28}\right) : 3$;

в) $-6\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3} + 3\frac{3}{16}$;

г) $-7\frac{1}{9} + 4\frac{1}{6} + 6\frac{8}{27}$.

35. Папирус Ринда

301. Араб завещал старшему сыну половину верблюдов, среднему – четверть, а младшему – пятую часть. А было у него всего 19 верблюдов. Мулла приехал помочь сыновьям разделить наследство. Присоединил своего верблюда к стаду и спросил: «Сколько теперь верблюдов?» «Двадцать», – ответили сыновья. «Пусть старший возьмет половину стада, т.е. 10 верблюдов, средний – четвертую часть, т.е. 5 верблюдов, а младший – пятую часть, т.е. 4 верблюда», – велел мулла и уехал на своем верблюде. Объясните, как могло случиться, что все братья получили больше, чем полагалось по завещанию.

302. Вычислите:

а) $\frac{2}{19} - \frac{1}{12} - \frac{1}{76} - \frac{1}{114}$;

б) $\frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228} - \frac{2}{19}$.

303. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

Один из знаменателей здесь заменен буквой x . Найдите этот знаменатель.

Следующая задача тоже была известна в древнем Египте. Но не думайте, что египтяне знали только эти две задачи. Слишком мало сохранилось свидетельств о математике того времени. Историкам приходится судить о далеком прошлом по весьма случайным скудным сведениям. Особенно это относится к истории науки. Летописцы, как и сегодняшние журналисты, с большим вниманием относились к сменам династий и религий, чем к открытиям ученых.

304. Пастух привел на мясокомбинат две трети от трети своего скота. Оказалось, что это 70 быков. Сколько скота в стаде?

305. Пошел было Иван-царевич искать Василису Прекрасную, как навстречу ему леший. «Знаю, — говорит, — я дорогу в Кашеево царство, случалось, ходил туда. Шел я четыре дня и четыре ночи. Первые день и ночь — прямой дорогой на север, и прошел я треть пути. Потом повернул на запад. Продирался лесом сутки, и прошел вдвое меньше. Третьи сутки — то же самое, лесом, уже на юг. А за четвертые сутки по дороге прошагал я на восток сто верст и попал в Кашеево царство. Ты ходок такой же резвый, как и я, иди, Иван-царевич, глядишь, доберешься до Кашея». «Нет, — отвечал Иван-царевич, — если все так, как ты говоришь, то уже завтра я увижу мою Василису Прекрасную». Прав ли он? Сколько верст прошел леший и сколько думает пройти Иван-царевич? (Считайте, что Земля плоская!)

Мария Ивановна вызвала Вовочку к доске: — Вовочка, найди x .

Вовочка долго бегал вдоль доски и вдруг обрадованно воскликнул, ткнув пальцем в доску: — Нашел!

306. Решите уравнения:

$$a) 1993 = 1 + \frac{8}{1 + \frac{8}{1 - \frac{8}{1 + \frac{4}{1 - \frac{4}{1 - \frac{8}{x}}}}}};$$

$$b) 1 + 2 : (1 + 32 : (1 + 1024 : (1 + 32 : (1 + 2 : (1 + 2 : (1 + 2 : (1 + 2 : (1 + 2 : (1 + 2 : x)))))))) = 1987.$$

307. Решите уравнения:

а) $\frac{7x-2}{10} - \frac{6+5x}{6} = \frac{5-2x}{7} - 1;$

б) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{6} - \frac{2}{9}x - 1\frac{1}{9} = -2;$

в) $\frac{4x-3}{2} - \frac{5-2x}{3} - \frac{3x-4}{3} = 5;$

г) $\frac{4x}{3} - 17 + \frac{3x-17}{4} = \frac{x+5}{2}.$

308. В классе число отсутствующих учеников составляло $1/6$ часть числа присутствующих. Когда из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $1/5$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

309. Какой угол составляют стрелки часов в а) 9 часов 20 минут; б) 11 часов 15 минут?

310. Повстречал гусь стаю: «Здравствуйте, сто гусей!» – «Нас не сто гусей, – ответили ему, – если бы нас было столько, сколько теперь, да еще столько, да полстолька, да четверть столька, да еще ты, гусь, с нами, так было бы нас сто гусей». Сколько гусей в стае?

36. Полпути вдвое медленнее – потратим то же время

Во время какой-то осады по городу шел разносчик воды и кричал: «Вода! Вода! Два ведра по шесть су!» Пролетевшая бомба разнесла на куски одно из ведер. «Вода! Вода! Двенадцать су ведро!», – как ни в чем не бывало затянул разносчик.

С.Шамфор

311. Двое одновременно отправились из А в В. Первый поехал на велосипеде, а второй – на автомобиле со скоростью, в пять раз большей скорости первого. На полпути автомобиль сломался, и оставшуюся часть пути автомобилист прошел пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них раньше прибыл в В?

312. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли два паука. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первый паук полз все время с постоянной скоростью, а второй хотя и поднимался вдвое медленнее первого, но зато спускался вдвое быстрее первого. Какой паук раньше приполз обратно?

313. Путь от дома до школы Буратино проделал пешком. Обратно он двигался той же дорогой, но первую половину пути он проехал на собаке, а вторую половину пути – на черепахе. Известно, что скорость собаки в четыре раза больше, а скорость черепахи – в два раза меньше, чем скорость, с которой Буратино шел в школу. На какой путь – из дома до школы или из школы до дома – затратил Буратино больше времени?

314*. Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта *A* в пункт *B*. Проехав треть пути, велосипедист остановился и поехал дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалась треть пути до *B*. Мотоциклист, доехав до *B*, сразу поехал обратно. Кто приедет раньше: мотоциклист в *A* или велосипедист в *B*?

37. Дурацкие вопросы

315. Шел паломник в Иерусалим и встретил трех странников. Каждый из них нес три мешка, в каждом мешке – 3 кота. Сколько живых существ двигалось в Иерусалим?

316. В комнате четыре угла. В каждом углу сидит кошка. Напротив каждой кошки по три кошки. На хвосте каждой кошки по одной кошке. Сколько же всего кошек в комнате?

317. Летели гуси: один впереди и два сзади; один сзади и два впереди; один между двумя и три в ряд. Сколько их было?

318. Три спички лежат на столе (рис.72). Удалите среднюю спичку из середины, не трогая ее.

319. Представьте, что вы тонете в озере в ста метрах от берега. Глубина невелика, но все-таки сантиметров на двадцать больше вашего роста. Помощи ждать неоткуда. Спасательных средств нет. К тому же вы не умеете плавать. Как спастись?

320. Вы зашли в темную кухню, где есть свеча, газовая плита и керосиновая лампа. Что вы зажжете в первую очередь?

321. Можно ли так бросить мяч, чтобы он, пролетев некоторое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

322. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Могло ли получиться 5 корок?

323. Три черепахи ползали наперегонки. После окончания соревнований первая заявила, что она опередила вторую, вторая сказала, что приползла не последней, а третья утверждала, что все время была впереди первой. Не могли бы вы дать правдоподобное объяснение таким ответам?

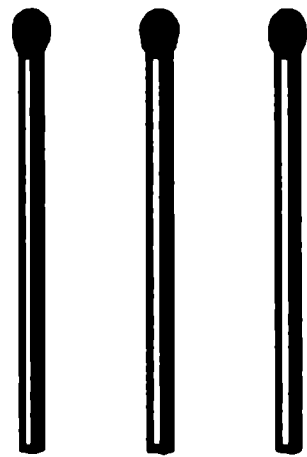


Рис. 72

324. а) Известно, что бегемот весит 1 т 800 кг. Сколько бегемотов может увезти машина грузоподъемностью в 5 тонн? б) А сколько крокодилов может увезти эта машина, если вес одного крокодила 175 кг?

325. Сколько концов у 4 палок? У 5 палок? У 4 с половиной палок?

326. Ничего не ломая и не разрезая, создайте на столе а) треугольник при помощи одной спички; б) квадрат при помощи двух спичек.

327. Малыш съедает одно пирожное за одну минуту. За какое время он съест 1000 пирожных?

328. Если двенадцать человек, работая по восемь часов в день, должны выкопать яму глубиной в десять с половиной миль, сколько времени пройдет – считая и воскресные дни! – прежде чем они положат свои лопаты?

329. Когда автомобиль движется все время со скоростью поезда?

330. Яблоко стоило 5 копеек, а груша – 10. Вова купил яблоко, а потом подумал: «Я уже заплатил 5 копеек, и у меня есть яблоко, которое стоит 5 копеек. Если я дам его продавцу, то он получит от меня в сумме 10 копеек. Значит, я смогу взять грушу. Это славно!» Прав ли он?

331. Двое пошли – два рубля нашли. Четверо пойдут – сколько денег найдут?

332. Большой, зеленый, живет под землей и питается камнями. Кто это?

333. Торговец купил некий товар за 7 долларов, продал его за 8, потом вновь купил за 9 долларов и опять продал за 10. Какую прибыль он получил?

Пояснение. Эту задачу разные люди решают разными путями, получают разные ответы. И многие готовы доказывать, что именно их ответ правильный!

Некоторые рассуждают так: купив некую вещь за 7 долларов и продав ее за 8, человек получает 1 доллар прибыли. Далее, вновь купив эту вещь за 9 долларов, после того как он уже продал ее за 8 долларов, покупатель теряет 1 доллар. Стало быть, к этому моменту он ничего не потерял и не приобрел. Но тогда, продав за 10 долларов вещь, которую он перед этим купил за 9 долларов, торговец вновь зарабатывает доллар. Следовательно, общая его прибыль составит 1 доллар.

Другой ход рассуждений приводит к выводу, что торговец ничего не приобретает и не теряет. В самом деле, если он продал за 8 долларов вещь, купив ее перед этим за 7 долларов, значит, он заработал 1 доллар. Но тогда он теряет 2 доллара, вновь покупая за 9 долларов вещь, за которую сам первоначально заплатил 7 долларов, так что к этому моменту у него образуется дефицит в 1 доллар.

В конце он получит свой доллар обратно, продав за 10 долларов вещь, которую перед этим купил за 9 долларов. Тем самым он останется, так сказать, при своих.

Оба рассуждения неверны. Найдите правильный ответ.

334. Продолжите последовательность чисел: 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, ...

Пояснение. Математик скажет, что можно написать любое число. Да, это так. Строго говоря, задача сформулирована неточно. Но постарайтесь все-таки решить ее, т.е. найдите простое правило, по которому образована эта последовательность. Если не получится, не расстраивайтесь – возможно, вы слишком умны и серьезны для таких шуточек.

*Следующую задачу весьма затруднительно решить без перебора вариантов. Сомнительна и ее научная ценность. Тем не менее, я хочу рассказать об этом курьезе. Есть в нем что-то симпатичное.*²⁰

335. Рассмотрим четырехзначное число, не все цифры которого одинаковы. Расставим его цифры в порядке убывания и в порядке возрастания. (При этом может получиться число, первая цифра которого равна нулю. Не будем обращать на это внимания.) Вычтем из одного другое. Получим новое четырехзначное число:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \begin{array}{r} 9971 \\ -1799 \\ \hline 8172 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 8721 \\ -1278 \\ \hline 7443 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 7443 \\ -3447 \\ \hline 3996 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 9963 \\ -3699 \\ \hline 6264 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 6642 \\ -2466 \\ \hline 4176 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 7641 \\ -1467 \\ \hline 6174 \end{array} & \rightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \begin{array}{r} 2100 \\ -12 \\ \hline 2088 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 8820 \\ -288 \\ \hline 8532 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 8532 \\ -2358 \\ \hline 6174 \end{array} & \rightarrow & \dots \\
 \begin{array}{r} 9661 \\ -1669 \\ \hline 7992 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 9972 \\ -2799 \\ \hline 7173 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 7731 \\ -1377 \\ \hline 6354 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 6543 \\ -3456 \\ \hline 3087 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 8730 \\ -0378 \\ \hline 8352 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 8532 \\ -2358 \\ \hline 6174 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{r} 7641 \\ -1467 \\ \hline 6174 \end{array} & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

(Если получилось число с меньшим числом знаков, допишем спереди нужное количество нулей.) Повторив эту операцию шесть раз, получим какое-то число. Какое?

²⁰ Английский врач, натуралист и поэт Эразм Дарвин (дед великого биолога Чарльза Дарвина) играл на трубе перед тюльпанами – хотел узнать, не отреагируют ли они на музыку. Не отреагировали. Но зато его внук создал теорию эволюции. Экспериментируйте – может быть, обнаружится что-нибудь достойное!

38. Вычисления

Конкурс блондинок. 500 блондинок в зале, одна – на сцене. Ведущий спрашивает:

- Сколько будет дважды два?
- Пять, – отвечает блондинка.
- Дайте ей шанс! Дайте ей шанс! – скандируют блондинки.
- Хорошо, – соглашается ведущий. – Сколько будет дважды два?
- Три, – отвечает блондинка.
- Дайте шанс! Еще один шанс! – скандируют блондинки.
- Ну, ладно, – уступает ведущий. – Сколько будет дважды два?
- Четыре, – отвечает блондинка.
- Дайте ей шанс! Еще один шанс!! – скандируют блондинки.

Не пользуйтесь, изучая арифметику, калькулятором! В магазине, в конструкторском бюро, вообще в реальной жизни – пожалуйста. А на уроке математики – нельзя! Не потому, что плох калькулятор – в конце концов, без компьютера современное общество невозможно. Даже эта книга никогда не появилась бы, не будь компьютера. Но математика учит думать, а не просто нажимать на кнопки.

К сожалению, многие радуются возможности быстро «решать» арифметические примеры при помощи калькулятора. И не понимают они, что возможность избавить школьников от вычислений была всегда. Посадите знатка (например, отличника-шестиклассника), и он решит все примеры! Издайте книжку с ответами – и все будут учиться только на пятерки! А что такое сложение, умножение... – знать никому не надо, в книге все ответы даны!

Вычислите:

$$336. (0,008 + 0,92) : (5 \cdot 0,6 - 1,4) + \left(10\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\right) : \left(3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right).$$

$$337. \frac{\left(13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6}\right) \cdot 230\frac{1}{25} + 46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7} + \frac{10}{3}\right) : \left(12\frac{1}{3} - 14\frac{2}{7}\right)}.$$

$$338. \frac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0,6-0,005\right)\right)\cdot 1,7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4,75+7\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{5}-0,95\right)}{33:4\frac{5}{7}}.$$

$$339. \frac{(7-6,35):6,5+9,9}{\left(1,2:36+1,2:0,25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}.$$

$$340. \left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1,25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right):(0,358-0,108)\right)\cdot 1,6-\frac{19}{25}.$$

$$341. \frac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}:\frac{5}{7}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}-\frac{\left(2\frac{1}{6}+4,5\right)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}.$$

$$342. \left(\frac{(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2-1,4):\frac{3}{70}}+0,125\right):2\frac{1}{2}+0,43.$$

$$343. \frac{\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}+31,5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}.$$

$$344. 5\frac{4}{7}:\left(8,4\cdot \frac{6}{7}\cdot \left(6-\frac{(2,3+5:6,25)\cdot 7}{8\cdot 0,0125+6,9}\right)-20,384:1,3\right).$$

$$345. \frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot \frac{4}{9}}.$$

$$346. \frac{0,125:0,25+1\frac{9}{16}:2,5}{(10-22:2,3)\cdot 0,46+1,6}+\left(\frac{17}{20}+1,9\right)\cdot 0,5.$$

$$347. \left(\frac{(3,2 - 1,7) : 0,003}{\left(\frac{29}{35} - \frac{3}{7} \right) \cdot 4 : \frac{1}{5}} - \frac{\left(1\frac{13}{20} - 1,5 \right) \cdot 1,5}{\left(2,44 + 1\frac{14}{25} \right) \cdot \frac{1}{8}} \right) : 62\frac{1}{20}.$$

$$348. \frac{(3,4 - 1,275) \cdot \frac{16}{17}}{\frac{5}{18} \cdot \left(1\frac{7}{85} + 6\frac{2}{17} \right)} + 0,5 \cdot \left(2 + \frac{12,5}{5,75 + \frac{1}{2}} \right).$$

$$349. \frac{0,128 : 3,2 + 0,86}{\frac{5}{6} \cdot 1,2 + 0,8} \cdot \frac{\left(1\frac{32}{63} - \frac{13}{21} \right) \cdot 3,6}{0,505 \cdot \frac{2}{5} - 0,002}.$$

$$350. \frac{\left(13,75 + 9\frac{1}{6} \right) \cdot 1,2}{\left(10,3 - 8\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{5}{9}} + \frac{\left(6,8 - 3\frac{3}{5} \right) \cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6} \right) \cdot 56} - 27\frac{1}{6}.$$

$$351. \left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49} \right) : \frac{2}{13 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}}} - \left(0,6 : 3\frac{3}{4} \right) \cdot 2\frac{1}{2} +$$

$$+ 3,75 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - 0,6.$$

$$352. \frac{\left(\frac{1}{6} + 0,1 + \frac{1}{15} \right) : \left(\frac{1}{6} + 0,1 - \frac{1}{15} \right)}{\left(0,5 - \frac{1}{3} + 0,25 - \frac{1}{5} \right) : \left(0,25 - \frac{1}{6} \right)} \cdot \frac{2,22 + \frac{7}{24 - \frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}.$$

$$353^*. \frac{\frac{\left(\frac{3}{5} + 0,425 - 0,005 \right)}{\left(30,5 + \frac{1}{6} + 3\frac{1}{3} \right) \cdot 0,1} + \frac{6\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2}}{26 : 3\frac{5}{7}} - \frac{1}{20} + \left(3 + \frac{133}{14 - \frac{3}{2}} \right) : \frac{31}{25}}{\left(\frac{3\frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6 - 2\frac{1}{3}}{4,6 + 2\frac{1}{3}} \cdot 5,2 \right) : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 5,7 \right)}.$$

354. Найдите X из пропорции:

$$\frac{\left(4 - 3,5 \cdot \left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5}\right)\right) : 0,16}{X} = \frac{3\frac{2}{7} - \frac{3}{14} : \frac{1}{6}}{41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}}.$$

39. Переливания

*Я чуть не плакал. Не было удачи!
Задача не решалась – хоть убей.
Условье было трудным у задачи.
Дано: «Летела стая лебедей»
Я, щеку грустно подперев рукою,
Делил, слагал – не шли дела на лад!
Но, лишь глаза усталые закрою,
Я видел ясно: вот они – летят...*

Е. Винокуров

355. Имеются два ведра: одно емкостью 4 литра, другое – 9 литров. Можно ли набрать из реки ровно 6 литров воды? (Если можно, то предъявите какой-нибудь способ. Если нельзя, то объясните, почему.)

Пояснение. Нам неизвестно, как отмерить 6 литров. А могли бы мы получить какой-нибудь другой объем? Давайте повозимся немного и все-таки что-нибудь предпримем. Мы можем наполнить большой сосуд, а затем из него наполнить маленький сосуд. Так мы получим 5 литров. А нам нужно получить не 5, а 6 литров. Начнем сначала. У нас два сосуда, мы можем...

Мы действуем так, как обычно действуют те, кто пытаются решить задачу. Пробуем так и этак, опорожняем и наполняем, а после неудачи начинаем снова, пробуя другие варианты. Мы *пробуем от начала к концу*, от данных к неизвестному. После многократных попыток, если повезет, мы случайно натолкнемся на решение.

Но очень умные люди или те, кто изучали математику, не будут тратить слишком много времени на такие попытки, а «перевернут задачу» и будут работать не только от начала к концу, но и *от конца к началу*, спросят себя: «Что от нас требуется? Что неизвестно?»

Постараемся возможно яснее представить положение, к которому мы стремимся. Пусть перед нами большой сосуд с 6 литрами воды, а маленький сосуд пустой. Из какого предшествующего результата могли бы мы получить это?

Мы могли бы полностью наполнить большой сосуд, т.е. налить в него 9 литров. Но тогда надо суметь отлить 3 литра. Для этого в маленьком сосуде должен быть 1 литр!

Но как получить 1 литр? Это не так уж просто, если вы не

встречались с этим раньше, в предварительных попытках. В любом случае – догадайтесь!

356. Можно ли отмерить 8 литров воды, находясь у реки и имея два ведра: одно вместимостью 15 литров, другое – вместимостью 16 литров?

357. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить ее, перевернув часы минимальное количество раз?

358. Из полного восьмилитрового ведра отлейте²¹ 4 литра с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона.

359. Отлейте из цистерны 13 литров молока, пользуясь бидонами емкостью 17 и 5 литров.

360. Двенадцативедерная бочка наполнена керосином. Разлейте его на две равные части, пользуясь пустыми пятиведерной и восьмиведерной бочками.

361. В баке не менее 10 литров бензина. Можно ли отлить 6 литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

362. В бочке не менее 13 ведер бензина. Можно ли отлить 8 ведер с помощью девятиведерной и пятиведерной бочек?

363. Имея два полных 10-литровых бидона молока и пустые 4- и 5-литровые кастрюли, отмерьте по 2 литра молока в каждую кастрюлю.²²

40. Прямоугольник составлен из квадратов

364. Прямоугольник на рисунке 73 составлен из квадратов. Найдите длину сторону самого большого квадрата, если длина сторона самого маленького равна 1.

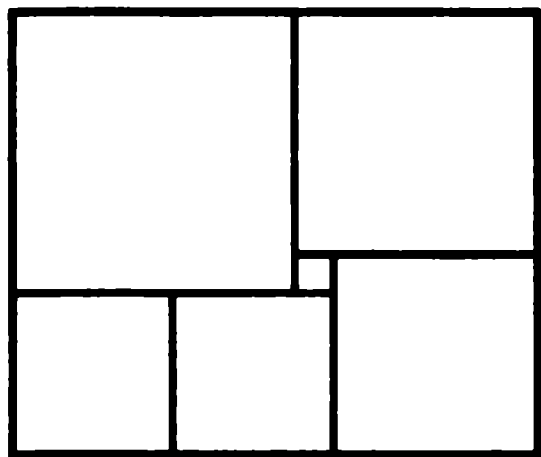


Рис. 73

Решение. Пусть длина стороны самого большого квадрата равна x . Тогда, двигаясь от большого квадрата по часовой стрелке, последовательно получаем длины сторон других квадратов: $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x - 3$. Из равенства верхней и нижней сторон прямоугольника получаем, что

²¹ Точнее, отмерьте. Ведь никаких сосудов, кроме данных трех, нет. И на землю ничего выплескивать нельзя, так что в конце концов должно оказаться 4 литра в восьмилитровом сосуде и 4 – в пятилитровом.

22 Как и в предыдущих задачах, выливать на землю ничего нельзя!

$x + (x - 1) = (x - 2) + (x - 3) + (x - 3)$, т.е. $2x - 1 = 3x - 8$, откуда $x = 7$.

Можно было обойтись и без уравнения. Начав с самого большого квадрата, совершим обход по часовой стрелке. Сторона правого верхнего квадрата на 1 меньше стороны левого верхнего. Еще на 1 меньше сторона правого нижнего квадрата. Еще на 1 меньше сторона среднего нижнего квадрата. Наконец, общий отрезок самого большого квадрата и только что упомянутого среднего нижнего квадрата еще на 1 меньше.

365. Фигура на рисунке 74 составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.

Можно обнаружить, что в некоторой аналогичной (но чуть более сложной) конструкции сторона нижнего правого

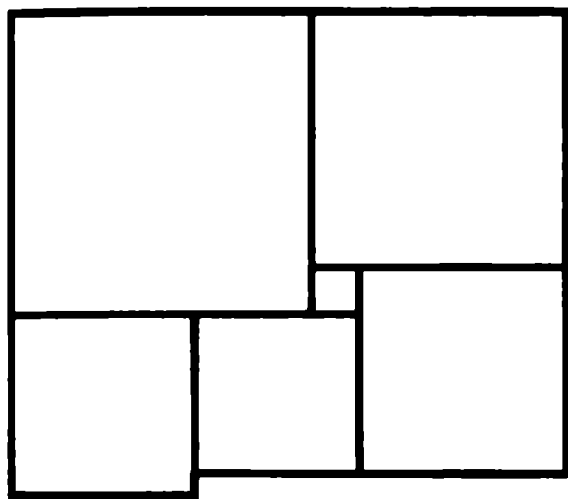


Рис. 74

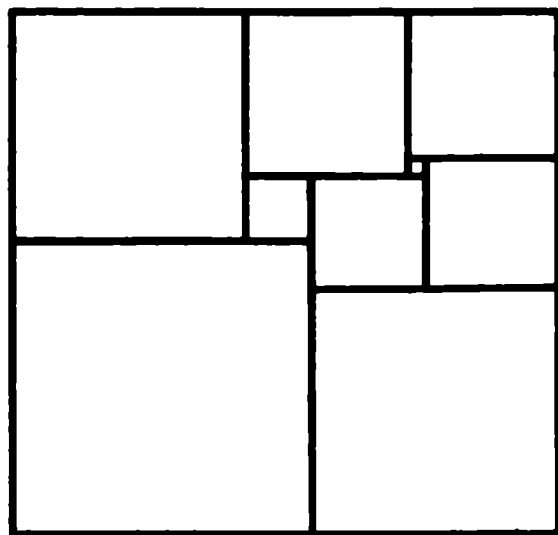


Рис. 75

квадрата всегда имеет длину 15. Добившись, чтобы этот квадрат был заподлицо с правой границей двух других правых квадратов, т.е. решив некоторое уравнение, найдем замечательный пример – разбиение прямоугольника на 9 квадратов разного размера.

366. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольник шириной 33 и высотой 32 клетки и разрежьте его на квадраты, как показано на рисунке 75. (Резать можно только вдоль линий сетки!)

41. Остров рыцарей и лжецов

Шерлок Холмс и доктор Ватсон пролетали на воздушном шаре над незнакомой местностью.

– Послушайте! – окликнул Холмс случайного прохожего. – Где мы находимся? Хотя бы приблизительно?

Тот внимательно посмотрел на них и ответил:

– Почему приблизительно? Я отвечу абсолютно точно. Вы в гондоле воздушного шара.

Очередной порыв ветра понес шар дальше, в неизвестном направлении, и Холмс раздраженно буркнул:

– Проклятые математики!

– Почему Вы считаете, что он математик? – удивился Ватсон.

– Прежде чем ответить, он подумал. А главное, его ответ был абсолютно точен и бесполезен.

В нижеследующих задачах дело происходит на острове, где живут рыцари (они всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут).

367. Человек говорит: «Я лжец». Является ли он жителем острова?

368. Каждый из собравшихся на площади жителей заявил остальным: «Все вы – лжецы». Сколько рыцарей среди них?

369. а) Каждый из 7 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи – лжец и рыцарь». Кто за столом? б) А если за столом сидело 9 человек?

370. Представьте, что все лжецы этого острова живут в одном городе, а все рыцари – в другом. Как выяснить у аборигена, куда ведет интересующая нас дорога – в город рыцарей или в город лжецов?

371. Какой вопрос вы задали бы жителю острова, чтобы узнать, живет ли у него дома ручной крокодил?

372. Перед нами – три островитянина Ах, Ох и Ух. Представьте, что они сказали:

Ах: – Мы все – лжецы.

Ох: – Ровно один из нас – лжец.

а) Можно ли определить, кто такой Ох – рыцарь или лжец?

б) Можно ли определить, кто такой Ух?

Логика есть искусство, которое упорядочивает и связывает мысли. Люди ошибаются именно потому, что им недостает логики.

Г.Лейбниц

373. Вася сказал, что на его дне рождения было больше шести гостей. А его сестра сказала, что гостей было больше пяти. Сколько было гостей, если известно, что одно утверждение верное, а другое ложное?

374. В Правительстве 20 министров. По крайней мере один из них честен. В каждой паре министров хотя бы один продажен. Сколько честных министров?

375. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов – хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

376. Каждый из четырех гномов – Беня, Веня, Женя и Сеня – либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали разговор:

Беня – Вене: – Ты врун.

Веня – Жене: – Сам ты врун!

Женя – Сене: – Оба они вруны. Да и ты тоже.

Кто из них говорит правду?

377. Приказом Малюты Скуратова один из экзаменационных вопросов для сотрудников секретных служб был строго засекречен. Поэтому сейчас содержание этого вопроса уже никому не известно. Но возможные ответы засекречены не были (рис.76). Определите, какой ответ является правильным.

-
- а) Все от б) до е);
 - б) Ни один из в) - е);
 - в) Все от а) до е);
 - г) Один из а), б), в);
 - д) Ни один из а) - г);
 - е) Ни один из а) - д).

378. Восстановите по некоторым сохранившимся на рисунке 77 номерам путь коня, побывавшего по одному разу на всех клетках доски 6×6 . (Т.е. расставьте числа от 1 до 36 так, чтобы отличающиеся на 1 числа были связаны ходом коня.)

Рис. 76

379. Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы рады бы отпустить тебя, но по нашему закону ты сначала должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Помогите Робинзону!

17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

Рис. 77

52	16			
			48	32
36				
	4		44	60
8	40		12	
				24
20	64			
		56	28	

Рис. 78

380**. Конь обошел всю доску и вернулся последним ходом на исходное поле. Восстановите весь маршрут по указанным (в порядке их обхода конем) на рисунке 78 номерам полей.

381**. Жители города Правдина всегда говорят правду, жители Лгунова всегда лгут, а жители Переменска на один из двух заданных подряд вопросов отвечают правду, а на другой – ложь. Помогите путешественнику определить, где он и с кем разговаривает, задав 4 вопроса первому встречному. (На вопросы отвечают только «да» или «нет».)

Должна сказать, что мои слова о том, что я всерьез подумываю о том, чтобы передумать, не следовало принимать всерьез. Я и не думаю передумывать.

382. Лева лжет²³ по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни говорит только правду. Выясните, в какие дни недели Лева может заявить: а) Я лгал вчера. б) Я буду лгать завтра. в) Я лгал вчера и буду лгать завтра.

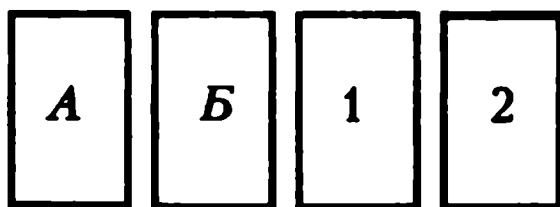
383. В одном городе жили два брата-близнеца, Петр и Василий. Петр не говорил правду по понедельникам, вторникам и средам, а Василий – по вторникам, четвергам и субботам. Как-то я повстречал их и спросил одного: «Как тебя зовут?» – «Петр», – ответил он. – «Какой сегодня день недели?» – «Вчера было воскресенье», – прозвучал ответ. – «А завтра будет пятница», – добавил его брат. – «Ты уверен, что говоришь правду?» – спросил я тогда второго. – «Я всегда говорю правду по средам».

Кто из братьев был Петр и в какой день недели происходил разговор?

384. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху

²³ Т.е. все время произносит только ложные утверждения.

написано:



(О том, что на обратных сторонах, ничего не известно.)

Какие карточки надо перевернуть, чтобы узнать, правда ли, что если на какой-то стороне карточки написано четное число, то на другой стороне – гласная буква?

385. Два мудреца написали на семи карточках числа от 5 до 11. После этого они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две оставшиеся карточки они не глядя спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца?

386. Для какого натурального числа x среди неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $3x > 25$, $x > 10$ и $x > 5$ три верны и два неверны?

387. Прямоугольник 3×6 разделен на три равных вертикальных столбца, покрашенных каждый своим цветом, как показано на рисунке 79. Разрежьте его на четыре части и сложите из них прямоугольник тех же размеров, цвета в котором располагаются, как на рисунке 80.

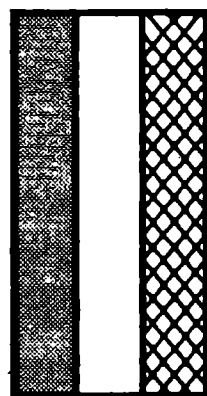


Рис. 79

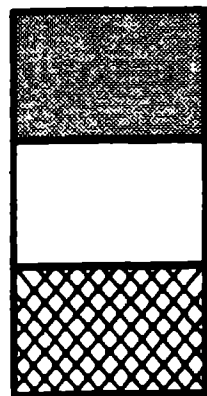


Рис. 80

40. Составление уравнений

*Как ни богато естество,
играющее в нас,
необходимо мастерство,
гранящее алмаз.*

И.Губерман

«Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический», — писал Исаак Ньютон в учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика». Как именно выполняется перевод, Ньютон показал на примерах. Вот один из них:

На русском языке	На языке алгебры
Купец имел некоторую сумму денег	x
В первый год он истратил 100 фунтов	$x - 100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
В следующем году он вновь истратил 100 фунтов	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
В третьем году он опять истратил 100 фунтов	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
После того как он добавил к остатку третью его часть,	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
капитал стал вдвое больше первоначального	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить последнее уравнение.

388. Решите уравнение $64x - 14800 = 54x$.

389. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище — столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост ее весит 1 кг. Сколько весит рыба?

390. Ученик должен был разделить число на 2 и к результату прибавить 3, а он, по ошибке, умножил число на 2 и от полученного частного отнял 3. Ответ все равно получился правильный. Какой?

391. Хозяин обещал работнику за год 12 рублей и кафтан. Но тот ушел через 7 месяцев. При расчете он получил кафтан и 5 рублей. Сколько стоит кафтан?

392. В магазине спортивных товаров туристы покупали снаряжение. Первый купил топорик и спальный мешок, заплатив 18 рублей. Второй купил два спальных мешка и рюкзак, заплатив 35 рублей. Третий купил топорик, спаль-

ный мешок и палатку, заплатив 68 рублей. Четвертый купил рюкзак, два спальных мешка и две палатки. Сколько заплатил четвертый турист?

393. Бутылка и стакан весят столько же, сколько кувшин. Бутылка весит столько же, сколько стакан и тарелка. Два кувшина весят столько же, сколько три тарелки. Сколько стаканов уравновешивают одну бутылку?

394. Написали два числа – первое и второе. К первому прибавили второе и получили третье. Ко второму прибавили третье и получили четвертое и т. д. Чему равна сумма шести выписанных чисел, если пятое равно 7?

395. Карандаш в шесть раз дешевле альбома, а ручка в два раза дешевле альбома. Альбом стоит на 20 копеек больше, чем ручка и карандаш вместе. Сколько стоят карандаш, ручка и альбом по отдельности?

396. В трех ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором – на 10 меньше, чем в первом и третьем вместе. Сколько орехов в третьем ящике?

397. Истратив половину денег, я заметил, что осталось вдвое меньше рублей, чем было первоначально копеек²⁴, и столько же копеек, сколько было первоначально рублей. Сколько денег я истратил?

398. Кирилл, Мефодий и Гутенберг взяли в библиотеке 40 книг. Если бы Кирилл взял еще одну книгу, то у него книг оказалось бы вдвое больше, чем у Гутенберга. А если бы Мефодий взял книг в 4 раза больше, то у него стало бы столько, сколько сейчас у Кирилла и Гутенберга вместе. Сколько книг взял каждый из них?

399. Надпись на камне над могилой Диофанта (греческий математик, III век н. э.): «Здесь погребен Диофант, и камень могильный расскажет, сколь долог был век его жизни. Часть шестую ее составляло прекрасное детство, двенадцатой части равна его светлая юность. Еще часть седьмая прошла – браком себя сочетал. Пять лет прошло – и послал Гименей ему сына, коему рок половину лишь жизни прекрасной дал по сравнению с отцом. И в печали глубокой старец кончину воспринял, четыре лишь года с тех пор прожив, как сына лишился». Сколько лет жизни достигнув, смерть воспринял Диофант?

400. Четверо товарищей покупают лодку. Первый вносит половину суммы, вносимой остальными; второй – треть суммы, вносимой остальными; третий – четверть суммы, вносимой остальными, а четвертый – 130 рублей. Сколько стоит лодка?

²⁴ Подразумевается, что число копеек меньше 100.

Наводящие вопросы. Какую долю стоимости лодки внес первый? А как посчитать долю стоимости, которую внес четвертый?

401. Известно, что 4 персика, 2 груши и яблоко вместе весят 550 г, а персик, 3 груши и 4 яблока вместе весят 450 г. Сколько весят персик, груша и яблоко вместе?

402. Представьте число 45 в виде суммы четырех чисел так, что после прибавления 2 к первому числу, вычитания 2 от второго числа, умножения третьего числа на 2 и деления четвертого числа на 2 эти числа становятся равными.

403. В полдень самолет вылетел из столицы в город Энск и приземлился там в 14 часов местного времени. В полночь по местному времени он вылетел обратно и оказался в столице в 6 часов утра. Сколько времени длится полет?

404*. Три крестьянки пришли на рынок с цыплятами. Одна принесла для продажи 10 цыплят, другая – 16, третья – 26. До полудня они продали несколько цыплят по одной и той же цене. После полудня, опасаясь, что не все цыплята будут проданы, они понизили цену. В результате они продали цыплят с одинаковой выручкой: каждая крестьянка получила от продажи 35 рублей²⁵. По какой цене продавали они цыплят до и после полудня?

405. В Великобритании и США температуру раньше измеряли по шкале Фаренгейта, в которой температура плавления льда (т.е. 0° Цельсия) составляет 32°, а температура кипения воды (100° Цельсия) – 212°. Формула для перевода температуры из одной шкалы в другую такова: $T_{\text{Ф}} = kT_{\text{Ц}} + b$, где $T_{\text{Ф}}$ и $T_{\text{Ц}}$ – температуры по Фаренгейту и по Цельсию. а) Найдите числа k и b . б) Существует ли температура, числовые значения которой по шкалам Цельсия и Фаренгейта одинаковы?

43. Повороты

Красоту математики (ее простоту, симметрию, сжатость и полноту) можно и следует дать почувствовать даже очень маленьким детям. Когда этот предмет излагают должным образом и притом конкретно, усвоение математики сопровождается эмоциями и наслаждением красотой.

Д.Юнг

406. Нарисуйте три одинаковых треугольника, из которых можно составить треугольник.

²⁵ Рубль состоит из 100 копеек.

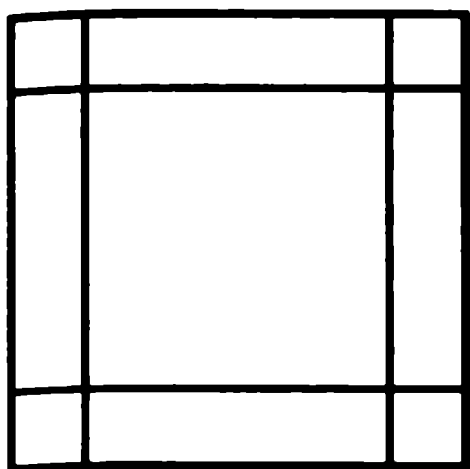


Рис. 81

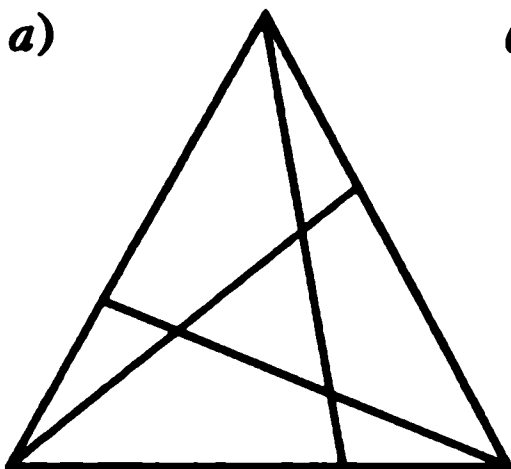
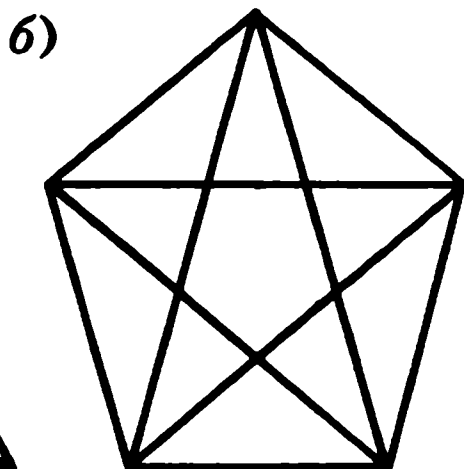


Рис. 82



407. Сколько всего квадратов изображено на рисунке 81?
 408. Сколько всего треугольников изображено на рисунке 82?

409*. На полях a1, b2, c3 и d4 шахматной доски стоят цифры 1, 2, 3 и 4 (рис.83). Разделите доску на четыре одинаковые части, чтобы в каждой из частей находилась бы в точности одна цифра.

Указание. Пусть при повороте вокруг центра квадрата на 90° переходят

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

Следующая задача составлена по мотивам известной игры «Морской бой».

410. Расставьте в квадрате 10×10 четыре корабля 1×1 и четыре корабля 1×2 так, чтобы после этого нельзя было поместить корабль 1×4 . (Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин), но могут прилегать к границам квадрата.)

411. Разрежьте фигуру рисунка 84 на две части и сложите из них целый квадрат 8×8 .

412. Один пятак лежит неподвижно, а другой пятак катится вокруг него. Сколько раз подвижный пятак обернется вокруг своего центра, прежде чем вернется в исходное положение? (Обязательно проведите эксперимент!)

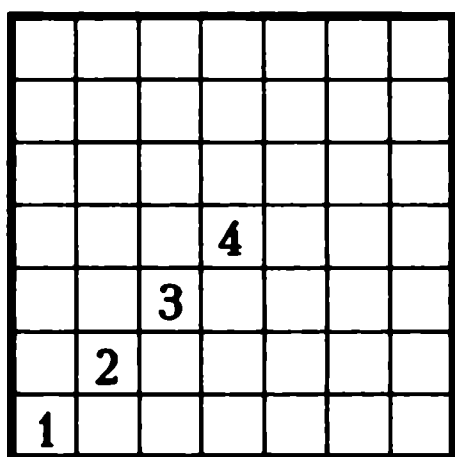


Рис. 83

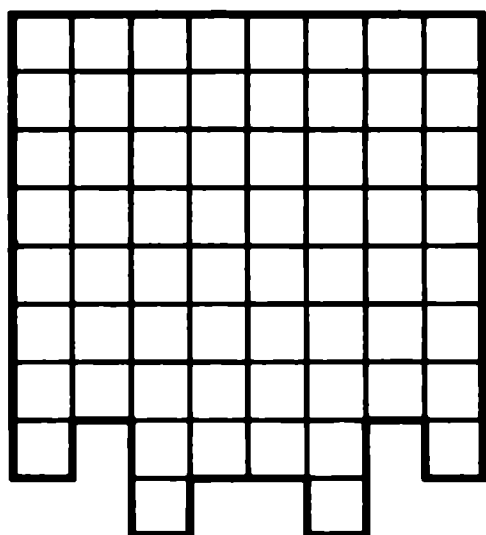


Рис. 84

44. Полдня артель косила большой луг

413. После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть.

На какую часть (от установившегося нового уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

414. Артели косцов предстояло скосить два луга, из которых один вдвое больше другого. Полдня артель косила большой луг, а на вторую половину дня разделилась пополам. Одна половина осталась докашивать большой луг, а другая принялась за малый. К вечеру большой луг скосили, а от малого остался участок, который был скошен за другой день одним косцом. Сколько косцов в артели?

Алгебраическое решение. Кроме неизвестного числа косцов x в этой задаче удобно ввести вспомогательное неизвестное y — размер участка, скашиваемого одним косцом за 1 день. Выразим через x и y площадь большого луга. Луг этот косили полдня x косцов; они скосили

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}.$$

Вторую половину дня его косила только половина артели, т.е. $x/2$ косцов; они скосили $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4}$. Поскольку к вечеру был скошен весь луг, площадь его равна

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Выразим теперь через x и y площадь меньшего луга. Его полдня косили $x/2$ косцов и скосили, как мы уже считали, площадь $xy/4$. Прибавим недокошенный участок, как раз равный y (напомню: y — площадь, скашиваемая одним косцом за один день), и как раз получим площадь меньшего луга: $\frac{xy}{4} + y$.

Осталось перевести на язык алгебры условие о том, что большой луг вдвое больше маленького, и уравнение составлено:

$$2 \cdot \left(\frac{xy}{4} + y \right) = \frac{3xy}{4}.$$

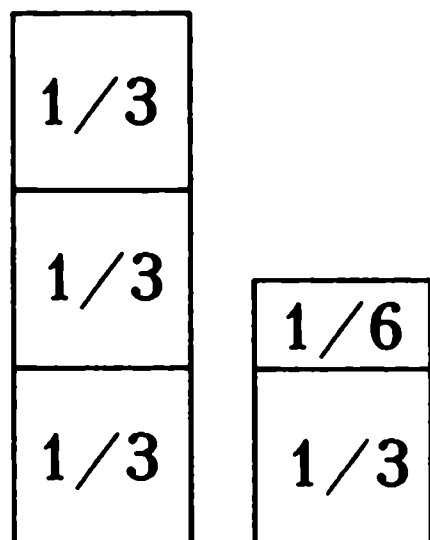


Рис. 85

Сократим обе части уравнения на y , затем домножим обе части на 4. Получим $2x + 8 = 3x$, откуда $x = 8$.

Ответ: в артели было 8 косцов.

Арифметическое решение этой задачи проще алгебраического. Оно восхищало Л.Н.Толстого, особенно то, что задача становится гораздо прозрачнее, если воспользоваться рисунком 85. Найдите это замечательное решение!

Есть и другое решение. Так как большой луг полдня косила вся артель и полдня полартели, то вдвое меньший можно скосить, полдня поработав половиной артели и полдня – четвертью артели. Вместо четверти артели косил один косец, причем не полдня, а целый день. Значит, четверть артели – это два косца, а вся артель – 8 косцов.

415. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного – за 17 минут. Пьер открыл сначала горячий кран. Через сколько минут он должен открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилсь в 1,5 раза больше, чем холодной?

Указание. Посчитайте, какую долю ванны составит горячая, а какую – холодная вода. Затем узнайте, сколько всего минут должен быть открыт горячий кран, сколько – холодный.

416. Все буквы латинского алфавита выписаны в пять строк (рис.86). Справа по тому же правилу выписаны буквы русского алфавита. Угадайте это правило.

A	M	T	U	V	W	Y	A	Д	М	П	Т	Ш
B	C	D	E	K			В	Е	З	К	С	Э
F	G	J	L	P	Q	R	Б	Г	Ё	Й	Л	Р
H	I	O	X				Ж	Н	О	Ф	Х	
N	S	Z					И					

Рис. 86

417. Можно ли прямоугольник размером 35×23 разрезать на прямоугольники размером 5×7? (Если можно, то как? Если нельзя, то почему?)

418. Нарисуйте замкнутую четырехзвенную ломаную без самопересечений, которая пересекает каждый из 12 отрезков рисунка 87 и не проходит через их концы.

419. Дядя Федор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий крайним справа, сядет между дядей Федором и котом, то кот станет крайним слева. В каком порядке они сидят?

420. Составьте из четырех фигур рисунка 88 прямоугольник.

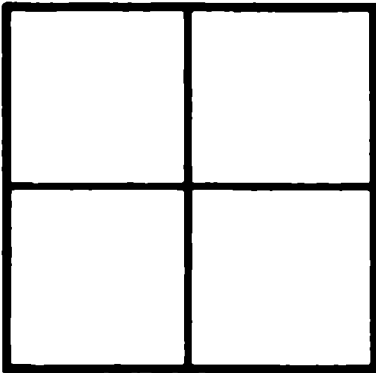


Рис. 87

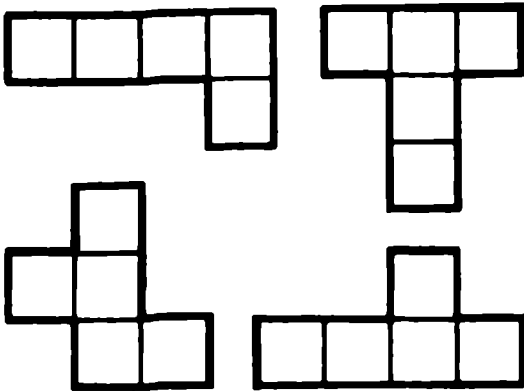


Рис. 88

45. Проценты

Цент – сотая часть у.е.

421. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

422. В школе 700 учащихся. Среди них 357 мальчиков. Сколько процентов учащихся этой школы составляют мальчики?

423. В приемной у премьер-министра 64 стула. Сколько стульев оказались свободными, если на прием пришли 75% из 60 министров?

424. Разложите 80 тетрадей на две стопки так, чтобы число тетрадей в одной из них составляло 60% числа тетрадей в другой.

425. После снижения цен на 30% свитер стал стоить 210000 рублей. Сколько стоил свитер до снижения цен?

426. Как изменится цена товара, если сначала ее увеличить на 100%, а затем уменьшить на 50%?

Подсказка. Если товар стоил 40 рублей, то после увеличения на 100% он станет стоить 80 рублей, а после уменьшения на 50% – заметьте, проценты считаем от новой величины! – товар снова станет стоить 40 рублей.

427. Множимое увеличили на 50%, а множитель уменьшили на 50%. Как изменилось произведение?

Пояснение. Начнем с произведения $6 \cdot 8 = 48$. Если число 6 увеличить на 50%, а 8 уменьшить на 50%, то получим числа 9 и 4, произведение которых равно 36.

428. Произведение трех чисел равно 1000. Первые два сомножителя увеличили на 10%, а третий уменьшили на 20%. Чему равно произведение трех полученных чисел?

429. Что больше: 15,5% от 49 или 49% от 15,5?

430. Цена картофеля повысилась на 20%. Через некоторое время цена понизилась на 20%. Когда картофель стоил дешевле: до повышения или после снижения?

430'. Шаги низкого на 20% короче, чем шаги высокого, но зато он за то же время делает на 20% больше шагов, чем высокий. Кто ходит быстрее?

431. А, В и С состязались в беге на 100 м. Когда А финишировал, В отставал от него на 10 м. Когда В финишировал, С отставал на 10 м. На сколько отставал С от А, когда А закончил бег?

Указание. Что будет, если A побежит вдвое быстрее, чем B , а B – вдвое быстрее, чем C ? Еще забавнее, если A побежит вдесятеро быстрее, чем B , а B – вдесятеро быстрее, чем C .

431'. В одном магазине цены уменьшили на 10%, а потом еще на 10% (от нового уровня). А в другом цены просто сразу снизили на 20%. Что выгоднее для покупателя?

432. За весну Обломов сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он или поправился за год?

433. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

434. Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

Подсказка. Во сколько раз уменьшилось содержание соли ($3,5 : 0,5 = 7$), во столько же раз должна увеличиться общая масса ($40 \cdot 7 = 280$).

435. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сушеных грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

436. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

437. В кружке, где занимается Миша, более 93% участников – девочки. Чему равно наименьшее возможное число участников кружка?

438. Какое наименьшее число участников может быть в кружке левитации, если мальчиков в нем меньше 50%, но больше 40%?

438'. Для какого наименьшего натурального числа n существует дробь со знаменателем n , находящаяся между числами 0,4 и 0,5?

439. При замерзании вода увеличила свой объем на $1/11$ часть (рис.89). На какую часть своего объема уменьшится лед при обратном превращении в воду?

440. По кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они идут в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько



Рис. 89

поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на $1/5$?

441. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объем выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?

442. а) В сосуде было 20 литров спирта. Часть его отлили и долили столько же воды. Затем, перемешав, отлили такую же часть и сосуд опять долили водой. В сосуде спирта оказалось втрое меньше, чем воды. Какую часть отливали?

б) Из полного бака, содержащего 729 литров чистой кислоты, отлили a литров и долили бак водой. После полного перемешивания (до получения однородного раствора) из бака опять отлили a литров раствора, снова долили бак водой и тщательно перемешали. После того как такая операция была проведена шесть раз, жидкость в баке содержала 64 литра чистой кислоты. Определите величину a .

443. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

444. Джеймс отправился в путь, предполагая каждый день проходить $1/3$ всего пути, чтобы через 3 дня прибыть на место. В первый день он действительно прошел $1/3$ пути, но во второй день, устав, он прошел не $1/3$ пути, а $1/3$ остатка. И в третий день он прошел $1/3$ нового остатка. В результате ему осталось пройти еще 32 км. Сколько километров он прошел в первый день?

445. В сентябре проездной билет на метро стоил 800 рублей. В октябре стоимость билета увеличили, в результате чего число проданных билетов уменьшилось на 25%, а выручка от их продажи уменьшилась на 6,25%. Сколько стал стоить проездной билет в октябре?

446*. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-й квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собрать денег на 40% больше, чем в первом, хотя квартир там и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трехзначные – втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в подъезде?

447. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?

448. Натуральное число разрешено увеличить на любое целое число процентов от 1 до 100, если результат – тоже натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя получить при помощи таких операций, начав с числа 1.

46. Перебор

Одна баба, ставя по праздникам свечку перед образом Георгия Победоносца, всегда показывала змею кукиш:

– Вот тебе, Егорий, свечка; а тебе шиш, окаянному!

Этим она так рассердила нечистого, что он не вытерпел; явился к ней во сне и стал стращать:

– Ну уж попадись ты только ко мне в ад, натерпишься муки!

После этого баба ставила по свечке и Егорию и змею. Люди и спрашивают, зачем она это делает?

– Да как же, родимые! Ведь незнамо еще куда попадешь: либо в рай, либо в ад!

449. Несколько косточек из набора домино уложили так, как показано на рисунке 90. Определите расположение косточек (т.е. покажите, где проходят границы между ними).

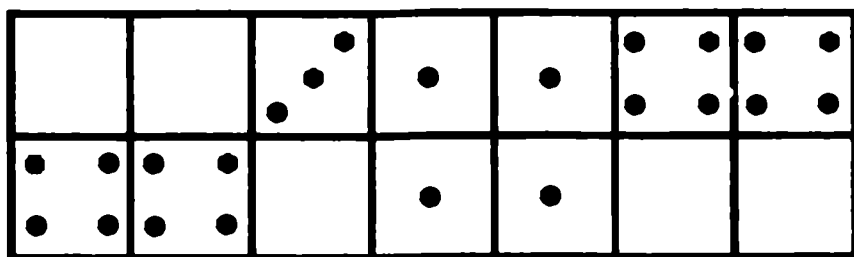


Рис. 90

450. Найдите все пятизначные числа с таким свойством: каждая цифра числа строго больше суммы цифр, стоящих правее нее (в частности, четвертая цифра больше пятой).

451. Летела стая одноголовых сороконожек и трехглавых драконов. Вместе у них а) 26 голов и 298 ног; б) 648 ног и 39 голов. Сколько ног у дракона?

452. На рисунке 91 – план минного поля. Из 36 клеток 9 заминированы, а остальные свободны от мин. Все числа на рисунке вписаны в свободные от мин квадраты и показывают, сколько у них заминированных соседей (соседними считаем клетки, примыкающие по вертикали, горизонтали или диагонали). Где мины?

453*. В квадрате размером 6×6 клеток некоторые клетки окрасили в черный цвет так, что из любой черной клетки можно пройти в любую другую черную клетку, переходя только через общие стороны черных клеток. Может

2		1			1
	3		1		
3				3	
2					3
				2	
0		0	0		1

Рис. 91

ли среди черных клеток быть 12 клеток, которые имеют общую сторону ровно с одной черной клеткой?

Пояснение. На рисунке 92 всего 3 черные клетки обладают свойством «иметь общую сторону ровно с одной черной клеткой», а на рисунке 93 таких клеток 6.

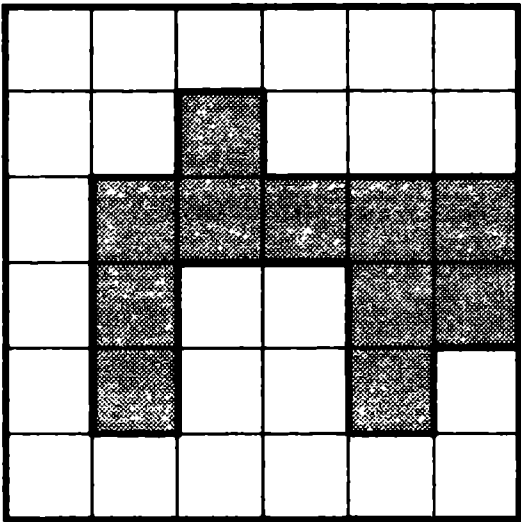


Рис. 92

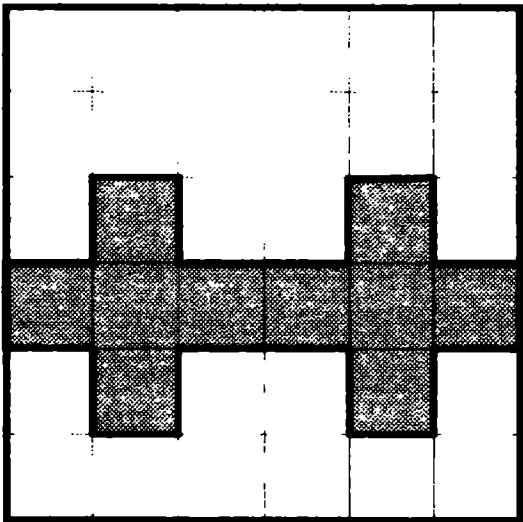


Рис. 93

454. Любые две соседние цифры числа образуют число, кратное 23. Какое наибольшее количество цифр может иметь это число?

455. Если к числу 20 прибавить 16, то получим 36 – полный квадрат. Если отнимем от 20 число 16, то получим 4 – тоже полный квадрат. Существуют ли еще целые числа, которые становятся квадратами как после прибавления к ним 16, так и после вычитания из них 16?

456*. а) Начав со стороны квадрата в верхнем левом углу (рис.94,*а*), пройдите в левый нижний угол, переступая только через стороны клеток (не через вершины!) и побывав в каждой белой клетке ровно один раз. (В заминированные клетки заходить нельзя!)

б) Найдите путь из левого верхнего угла рисунка 94,*б* до

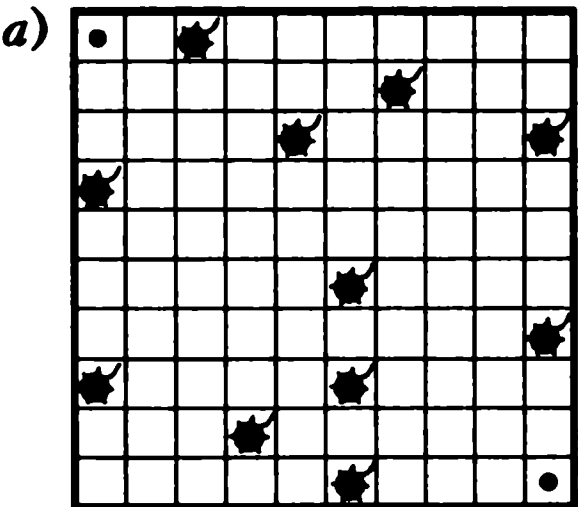


Рис. 94

правого нижнего (от «а» до «я»), который проходит по одному разу по каждой букве алфавита. (Ходить разрешается только на соседнюю букву по вертикали или горизонтали).

Случайно догадаться до ответа в задаче 456 невозможно. Самое разумное – действовать последовательно-логически, постепенно проясняя ситуацию. В следующей задаче тоже не надейтесь на удачу: вариантов очень много, наверняка запутаетесь. Лучше закрашивайте клетки одну за другой, каждый раз находя такую, чтобы это можно было сделать единственным образом.

457. Покрасьте клетки доски 5×5 в 5 цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном и в каждом выделенном блоке (рис.95) все цвета встречались бы по одному разу.

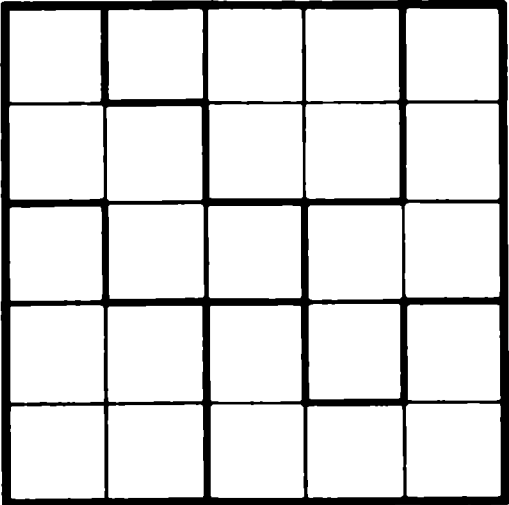


Рис. 95

458. а), б) Все косточки домино разложены (рис.96) в виде прямоугольника 7×8 так, что суммы чисел во всех строках

а)

3	6	6	2	3	2	2	0
1	2	4	1	5	2	4	5
6	6	1	3	6	2	0	0
0	1	4	3	0	5	5	6
5	5	0	4	6	2	1	1
3	1	2	3	1	4	6	4
3	0	4	5	0	4	3	5

б)

0	1	2	5	1	4	5	6
0	1	2	5	1	4	5	6
5	2	6	3	3	0	4	1
5	2	6	3	3	0	4	1
3	3	4	4	2	2	3	3
4	6	0	0	6	6	0	2
4	6	1	1	5	5	0	2

Рис. 96

одинаковы (равны 24) и суммы чисел во всех столбцах тоже одинаковы (равны 21). Выясните, как именно лежат доминошки.

в) Можно ли разложить косточки в виде прямоугольника 14×4 , чтобы суммы во всех строках были одинаковы и суммы во всех столбцах тоже были одинаковы?

459. Отметьте 10 точек на рисунке 97, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой.

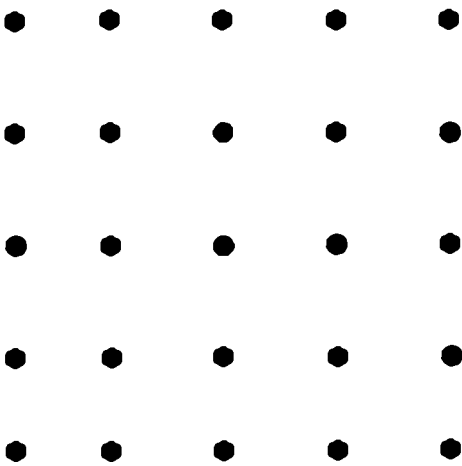


Рис. 97

460. Однажды у знаменитого индийского математика Рамануджана спросили, чем замечательно число 1729. «Так это же наименьшее натуральное число, которое представимо в виде суммы кубов двух натуральных чисел двумя разными способами!» – воскликнул он. Найдите эти представления.

461. Используя ровно пять раз цифру 5, представьте любое целое число от 0 до 10.

Подсказка. $(5 - 5) \cdot (5 + 5 + 5) = 0$ и $5 + 5 + (5 - 5) \cdot 5 = 10$.

462. Используя ровно четыре раза цифру 4, скобки и знаки арифметических действий, представьте любое число от 0 до 10.

463. Расставьте, где это требуется, знаки арифметических действий и скобки, чтобы равенства были верными:

- а) $5\ 5\ 5\ 5 = 26$; б) $5\ 5\ 5\ 5 = 30$; в) $5\ 5\ 5\ 5 = 50$;
 г) $5\ 5\ 5\ 5 = 55$; д) $5\ 5\ 5\ 5 = 120$; е) $5\ 5\ 5\ 5 = 130$;
 ж) $5\ 5\ 5\ 5 = 625$; з) $5\ 5\ 5\ 5 = 111$; и) $5\ 5\ 5\ 5 = 2$.

464.** а) Дан фрагмент из японской таблицы умножения (рис.98,а). Заполните места, где стоят вопросительные знаки.

б) Даны вычисления на датском языке (рис.98,б), причем числа переданы числительными в их полной форме, употребляемой обычно лишь в официальных документах (приведена

а) ФУТАЦУ·ЁЦУ = ЯЦУ

ИЦУЦУ·ИЦУЦУ = НИДЗЁГО

ЯЦУ·КОКОНОЦУ = СИТИДЗЁНИ

ИЦУЦУ·ЯЦУ = ЁНДЗЁ

МИЦУ·МИЦУ = ДЗЁХАТИ

КОКОНОЦУ·МИЦУ = НИДЗЁСИТИ

КОКОНОЦУ·МУЦУ = ?

КОКОНОЦУ·? = ХАТИДЗЁИТИ

ЁЦУ·? = САНДЗЁНИ

ФУТАЦУ·НАНАЦУ = ?

б) FEM · FIR = TYVE

FEM · FEM = FEMOTYVE

FIREOFIRSINSTYVE + SEKS =
= HALVFEMSINSTYVE

SEKSOTRESINSTYVE + NIDEN =
= FEMOFIRSINSTYVE

FEMDEN + FEMOTRESINSTYVE =
= FIRSINSTYVE

TREDEN + ? = NIOTYVE

SEKS · NÍ = ?

NIOTRESINSTYVE + FIREOTYVE = ?

Рис. 98

приближенная запись произношения этих числительных). Заполните места, где стоят вопросительные знаки.

465. а) Существует ли восьмизначное число, которое делится на каждую из своих цифр?

б) Существует ли семизначное число, которое делится на произведение своих цифр?

466. Поставьте на шахматную доску 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга.

47. Ребусы

467. Решите ребус. (Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным – разные. Нужно найти все возможные варианты.)

$$\begin{array}{r} \text{T H I S} \\ + \quad \text{I S} \\ \hline \text{E A S Y} \end{array}$$

Указание. Подумайте, какими должны быть цифры Т и Н, чтобы из них могли получиться отличные от них Е и А. После этого – перебирайте варианты.

468. Решите ребусы:

а)
$$\begin{array}{r} \text{КРОСС} \\ + \text{КРОСС} \\ \hline \text{СПОРТ} \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} \text{ДУРАК} \\ + \text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАКА} \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} \text{ОДИН} \\ + \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ + \text{TEN} \\ \hline \text{TEN} \\ \hline \text{SIXTY} \end{array}$$

469. Расшифруйте ребусы:

а)
$$\begin{array}{r} \text{EINS} \\ \text{EINS} \\ + \text{EINS} \\ \text{EINS} \\ \text{EINS} \\ \hline \text{FÜNF} \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} \text{КАФТАН} \\ + \text{КАФТАН} \\ \hline \text{ТРИШКА} \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} \text{КНИГА} \\ + \text{КНИГА} \\ \text{КНИГА} \\ \hline \text{НАУКА} \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} \text{СОТНЯ} \\ + \text{СОТНЯ} \\ \text{СОТНЯ} \\ \hline \text{ТРИСТА} \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} \text{АИСТ} \\ \text{АИСТ} \\ + \text{АИСТ} \\ \text{АИСТ} \\ \hline \text{СТАЯ} \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} \text{АИСТ} \\ \text{АИСТ} \\ + \text{АИСТ} \\ \text{АИСТ} \\ \hline \text{АИСТ} \\ \hline \text{СТАЯ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ж) } \text{АРШИН} \\ + \text{АРШИН} \\ \text{АРШИН} \\ \hline \text{САЖЕНЬ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{з) } \text{EINS} \\ \text{EINS} \\ + \text{EINS} \\ \text{EINS} \\ \hline \text{VIER} \end{array}$$

470. Перепишите цифры 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (именно в таком порядке) и поставьте в некоторых местах арифметические знаки и скобки, чтобы получилось число а) 1000; б) 1001. (Например, $999 = (1 + 23) \cdot 45 + 6 - 78 - 9$.)

470'. Между некоторыми из цифр 1 2 3 4 5 6 7 8 9, написанными в указанном порядке, поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы получилось число 100.

471. Впишите в квадратики рисунка 99 цифры от 0 до 9, используя каждую из них по одному разу, чтобы получи-

$$\square + \square = \square \square$$

$$\square + \square = \square$$

$$\square + \square = \square$$

лось три верных примера на сложение. Найдите все решения, не считая полученных изменением порядка слагаемых.

Указание. Будет неплохо, если удастся расставить цифры, как требуется в условии задачи. Но при этом не будет уверенности, что задача не имеет других решений. Если же вы хотите найти все решения, то можете придерживаться следующего плана:

1) пользуясь тем, что цифра 0 не может находиться ни в нижних двух равенствах, ни в левой части верхнего, определите единственное место для нее;

2) определите цифру, которая стоит перед нулем;

3) запишите все возможные пары слагаемых, дающие эту двузначную сумму; для каждой пары составьте, если удастся, примеры из оставшихся цифр.

Рис. 99

48. Комбинаторика

*Я мог бы их пересчитать,
Но мне не дали дописать.*

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

472. Сколькими способами можно представить число 50 в виде суммы двух четных положительных целых чисел? (В

этой и в двух следующих задачах давайте договоримся представления, различающиеся лишь порядком слагаемых, считать совпадающими.)

473. Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы четырех нечетных положительных чисел?

474. Сколькими способами можно представить число 6 в виде суммы нечетных положительных слагаемых?

475. В киоске продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?

476. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

Задача 476 отличается от предыдущей тем, что выбор капитана ограничивает круг претендентов на роль заместителя: капитан не может быть своим заместителем. Таким образом, выборы капитана и его заместителя не являются независимыми – такими, как выбор конверта и марки.

477. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трех дверей, а за каждой из них ее ожидают четыре двери. Пройдя какую-либо дверь, крыса не может вернуться через нее обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?

478. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?

Пояснение. Гласную можно выбрать двумя способами (О или Е), а согласную – пятью способами (К, Н, В, Р или Т).

479. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьет 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остается 49 полей, на которые можно поставить черную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

480. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

481. РАННИМ УТРОМ НА РЫБАЛКУ УЛЫБАЮЩИЙСЯ ИГОРЬ МЧАЛСЯ БОСИКОМ. Сколько осмысленных предложений можно составить, вычеркивая некоторые слова этого предложения? (Во все предложения обязательно должны входить подлежащее ИГОРЬ и сказуемое МЧАЛСЯ.)

а) К Р О Н А	б) К
Р О Н А	К О
О Н А	К О Р
Н А	К О Р Е
А	К О Р Е Н
	К О Р Е Н Ь

Рис. 100

тельно должны входить подлежащее ИГОРЬ и сказуемое МЧАЛСЯ.)

482. Сколькими способами можно прочитать слово
а) КРОНА (рис.100,а);
б) КОРЕНЬ (рис.100,б), начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз до последней буквы?

483. В нашем распоряжении есть три разных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок флагов в сигнале учитывается?

484. Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры чисел: а) 133; б) 9854; в) 3213; г) 98561; д) 32123?

484'. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слов: а) крот; б) мама?

49. Факториал

Займемся теперь подсчетом числа способов, которыми можно расположить в ряд несколько разных предметов. Такие расположения называются перестановками и играют важную роль в комбинаторике.

485. Сколько существует трехзначных чисел, в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

Решение. На первое место можно поставить любую из трех цифр, на второе – любую из двух оставшихся, а на третье – последнюю оставшуюся цифру. Таким образом, всего получается $3 \cdot 2 = 6$ чисел.

486. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

Рассуждая так же, как при решении двух последних задач, легко понять, что n различных предметов можно выложить в ряд $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ различными способами.

Определение. $n!$ (читается «эн-факториал») – это произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ всех натуральных чисел от 1 до n .

Таким образом, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 5 \cdot 24 = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, ...

Следует иметь в виду, что принято считать $0!$ равным 1. При таком определении формула $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ выполняется и при $n = 0$.

487. Вычислите а) $100! / 98!$; б) $n! / (n - 1)!$.

488. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь к театральной кассе?

489. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (т.е. каждая следующая меньше предыдущей)?

490. Грани куба можно окрасить либо все в белый цвет, либо все в черный, либо некоторые в белый, а некоторые в черный. Сколько существует разных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как ни вращай.)

491. Сколько имеется трехзначных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра 5?

50. Включения – исключения

Человек, впервые сформулировавший, что «два и два четыре», – великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками. Все дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо большие вещи, например паровоз с паровозом, – не математики.

В.Маяковский

492. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

493. В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 – в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

494. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

Решение. Перейдем к дополнительным событиям: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шел 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более $20 + 10 + 50 = 80\%$ времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала не меньше $100 - 80 = 20\%$ времени.

495. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 – испанский, 75 – немецкий. Сколько человек заведомо знают все три языка?

Наводящие вопросы. Сколько человек не знают английский язык? А испанский? А немецкий?

496. Каждый десятый математик – философ. Каждый сотый философ – математик. Кого больше: философов или математиков?

497. Каких натуральных чисел от 1 до 1993 больше: тех, которые кратны 8, но не кратны 9, или тех, которые кратны 9, но не кратны 8?

Указание. Добавьте к тем и другим числа, кратные и 8, и 9. Останется сравнить количество чисел, кратных 8 $\left(\left[\frac{1993}{8}\right] = 249\right)$, с количеством чисел, кратных 9 $\left(\left[\frac{1993}{9}\right] = 221\right)$. Здесь квадратными скобками обозначена целая часть.

498. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не кратны а) ни 2, ни 5; б) ни 2, ни 3, ни 5?

499. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Указание. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечетны.

500. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть цифра 7, или тех, в записи которых ее нет?

51. Возрасты

Некая дама на вопрос, сколько ей лет, ответила: «Когда я выходила замуж, мужу было 40, а мне 20. Сейчас ему 60. Значит, мне 30».

501. Сереже 11 лет, Вове 1 год. Сколько лет будет Сереже, когда он станет втрое старше Вовы?

502. У 35-летнего отца 4 сына. Каждый младше другого на 2 года, причем старшему 8 лет. Через сколько лет детям вместе будет столько же лет, сколько отцу?

503. Если к половине моих лет прибавить 7, то получится мой возраст 13 лет тому назад. Сколько мне лет?

504. а) Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года. Сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет каждому из них?

б) Решите уравнение $27 + x = 3(x + 3)$.

505. Абдулла вчетверо старше Махмуда. Сумма их возрастов – 50 лет. Через сколько лет Абдулла будет втрое старше Махмуда?

506. Отец старше сына в 4 раза. Через 20 лет он будет старше сына в 2 раза. Сколько сейчас лет отцу?

507. Некто сказал: «Когда я проживу еще половину, да треть, да четверть моих лет, мне станет 100 лет». Сколько ему лет?

508. Москва старше Петербурга на 556 лет. В 1981 году Москва была втрое старше Петербурга.

а) В каком году основана Москва и в каком году основан Петербург?

б) Когда Москва станет ровно вдвое старше Петербурга?

509. Отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе; сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет каждому?

510. Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

Решение. Обозначим искомый срок через x . Спустя x лет отцу будет $32 + x$ лет, а сыну $5 + x$. Поскольку отец должен быть в 10 раз старше сына, то имеем уравнение $32 + x = 10(5 + x)$. Решая его, получаем $x = -2$. «Через минус 2 года» означает «два года назад». Составляя уравнение, мы не думали о том, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз больше возраста сына. Уравнение оказалось вдумчивее нас и позаботилось обо всем само.

– Как Ваша фамилия?

– Спасибо, ничего. А Ваша?

511. Тане больше лет, чем будет Гале, когда Ире исполнится столько лет, сколько Тане сейчас. Кто из них самая старшая, а кто самая младшая?

512. Моему брату через 2 года будет вдвое больше лет, чем ему было 2 года назад, а моя сестра через 3 года будет втрое старше, чем 3 года назад. Кто из них старше?

513. Мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Сколько мне лет, если нам вместе 70 лет?

Решение. Составим таблицу²⁶:

	Мой возраст	Ваш возраст
Сейчас	x	y
Тогда	y	$x/2$

Посчитав двумя способами время, отделяющее «сейчас» от «тогда», составим уравнение:

$$x - y = y - \frac{x}{2},$$

откуда . Значит, $3x = 4y$. Поскольку $x + y = 70$, ответ очевиден: $x = 40$, $y = 30$. Мне сейчас 40 лет.

514. Зульфии и Минисе вместе 35 лет. Сейчас Зульфии вдвое больше лет, чем было Минисе тогда, когда Зульфии было столько лет, сколько Минисе сейчас. Сколько лет Зульфии?

515. Альфире втрое больше лет, чем было Эльдару, когда она была в его нынешнем возрасте. Когда он будет в ее нынешнем возрасте, им вместе будет 28 лет. Сколько сейчас лет Альфире и сколько – Эльдару?

516. Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре вместе будет 100 лет?

517. Юре и Юле сейчас вместе 26 лет, причем Юле в три раза меньше лет, чем будет Юре тогда, когда им вместе будет в пять раз больше лет, чем Юре сейчас. Сколько лет сейчас Юре?

Нельзя починить то, что не сломано.

518. Доску размером 8×8 разрезали на четыре части и сложили из них прямоугольник размером 5×13 (рис.101). Откуда появилась лишняя клетка?

519. Сравните рисунки 102,а и 102,б. Откуда возникали лишние клетки?

²⁶ «Тогда» относится ко времени, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас.

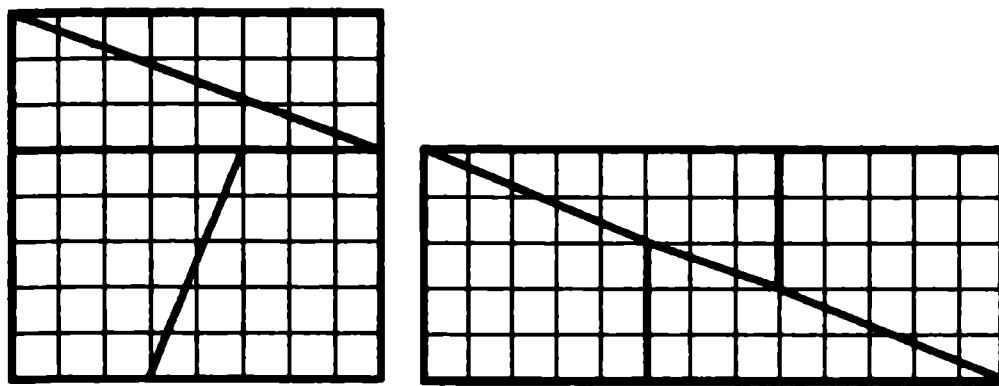


Рис. 101

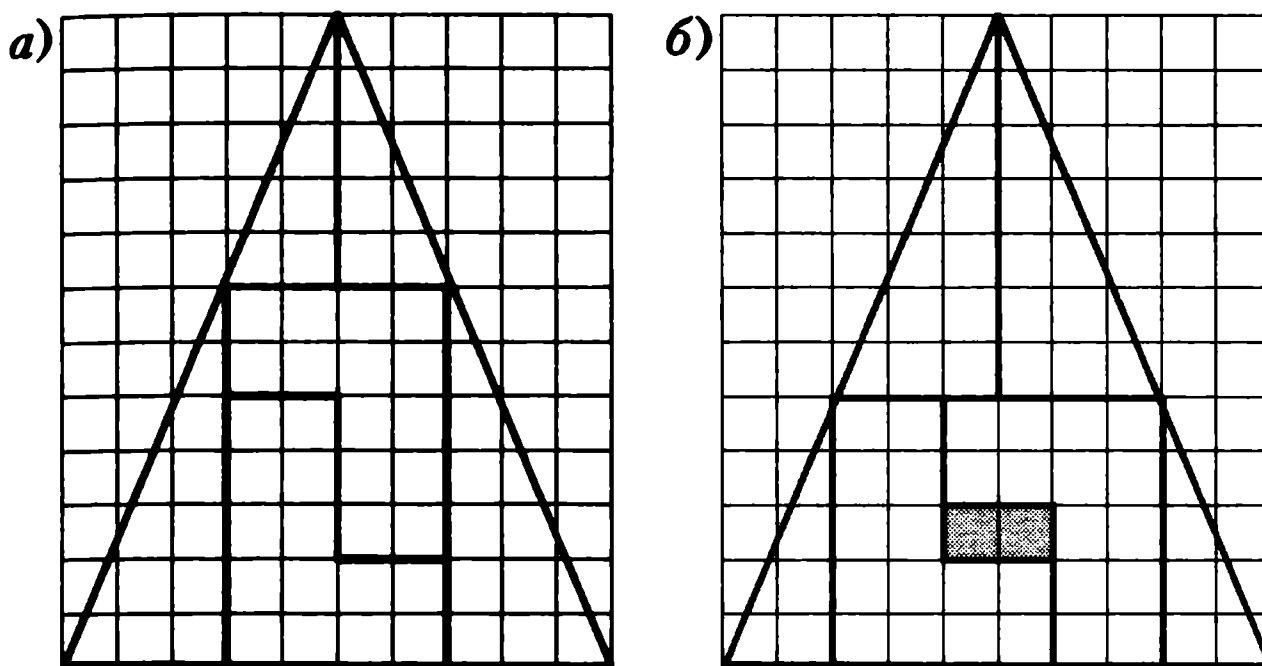


Рис. 102

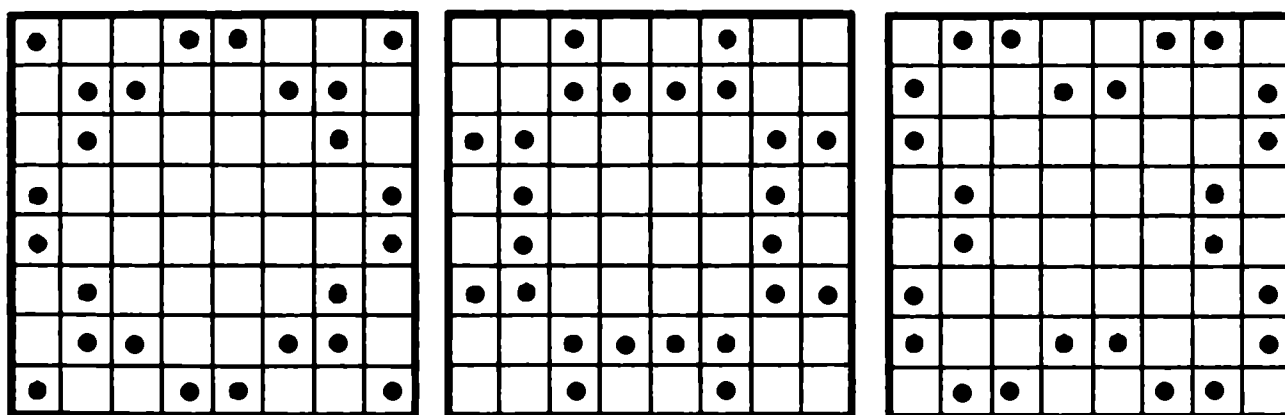


Рис. 103

520. На рисунке 103 показаны разные способы расставить на шахматной доске 24 коня, каждый из которых бьет ровно два других. Расставьте на доске 32 коня, чтобы каждый из них бил ровно два других.

521. Вычислите:

а) $\frac{74 \cdot 147 - 73}{73 \cdot 147 + 74};$

б) $\frac{244 \cdot 395 - 151}{244 + 395 \cdot 243};$

в) $\frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}.$

521'. Упростите выражения:

$$\text{а) } \frac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1}; \quad \text{б) } \frac{a(a+b)-b}{a+(a+b)(a-1)};$$

$$\text{в) } \frac{a(2a-1)-(a-1)}{(a-1)(2a-1)+a}.$$

52. Гонки

В наши дни портреты пишут за семь минут, рисовать обучают за три дня, английский язык втолковывают за сорок уроков, восемь языков одновременно преподают с помощью нескольких гравюр, где изображены различные предметы и названия их на этих восьми языках. Словом, если бы можно было собрать воедино все наслаждения, чувства и мысли, на которые пока что уходит целая жизнь, и вместить их в одни сутки, сделали бы, вероятно, и это. Вам сунули бы в рот пилюлю и объявили: «Глотайте и проваливайтесь!»

С.Шамфор

522. Машина едет со скоростью 60 км/ч. На сколько следует увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте?

523. Между лисой и зайцем 10 м. Когда лиса поймает зайца, если она бежит со скоростью 8 м/с, а он – со скоростью 7 м/с?

524. Послан человек из Москвы в Вологду, и проходит он каждый день 40 верст. На следующий день вслед послан другой человек, проходящий 45 верст в день. Когда второй догонит первого?

525. В дневнике у Вовочки уже записано 200 замечаний, а у Машеньки – 112. Через сколько недель они сравняются, если Машенька получает на 22 замечания в неделю больше, чем Вовочка?

526. В 336-ведерную емкость всякий час одною трубою втекает 70 ведер воды, а другою трубою вытекает 42 ведра. За какое время емкость наполнится?

Указание. Каждый час количество воды в емкости увеличивается на $70 - 42 = 28$ ведер. Чтобы найти время, нужно разделить 336 на 28.

527. В двух сосудах находится по 540 литров воды. Из первого вытекает по 25 литров в минуту, а из другого – по 15 литров. Через какое время во втором сосуде воды останется в шесть раз больше, чем в первом?

528. Через час после начала равномерного спуска в бассейне осталось 400 кубометров воды, а еще через 3 часа – 250. Сколько воды было в бассейне первоначально?

Указание. Ответ очевиден из рисунка 104. Можно найти его и без графика, вычислив, сколько воды вытекает из бассейна за 1 час.

529. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат – 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 минут раньше меня?

Решение. Первый способ. На весь

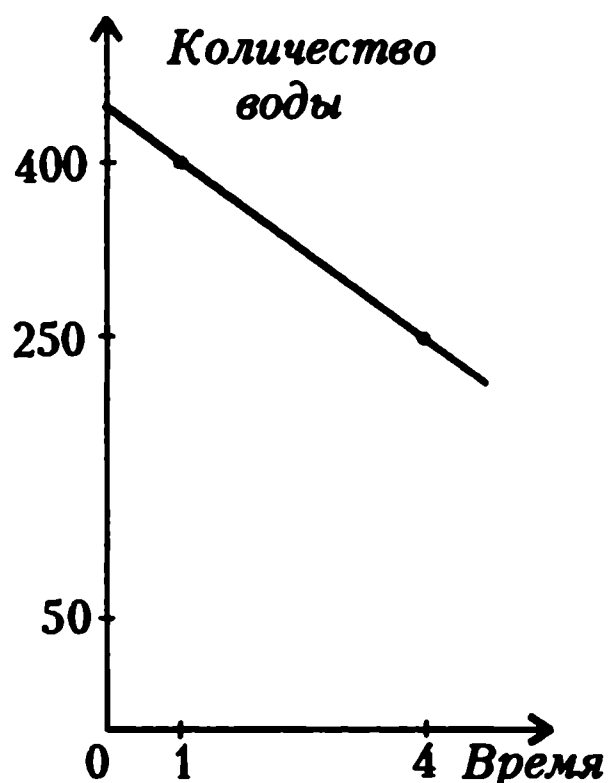


Рис. 104

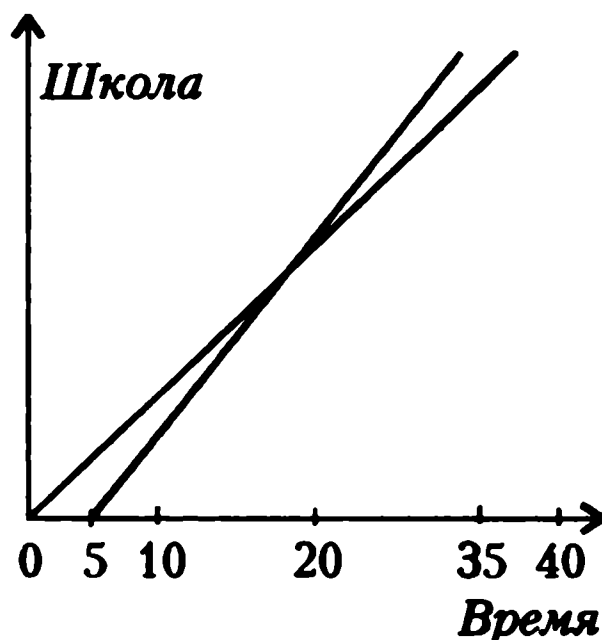


Рис. 105

путь от дома до школы я трачу на 10 минут меньше брата. Значит, на половину пути я потрачу на 5 минут меньше. Мы встретимся ровно на половине пути от дома до школы.

Второй способ. Нарисуем графики (рис.105). Очевидно, я догоню брата на 20-й минуте его движения, т.е. через 15 минут после того, как отправлюсь в путь.

530. Пассажир, проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шел вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Спустя 10 секунд пассажир вышел из трамвая и пошел догонять своего знакомого. Через сколько секунд он догонит знакомого, двигаясь в два раза быстрее знакомого и в пять раз медленнее трамвая?

Указание. На рисунке 106 изображены графики движения пассажира и его знакомого.

531. Грузовик проезжает некоторое расстояние за 10 часов.

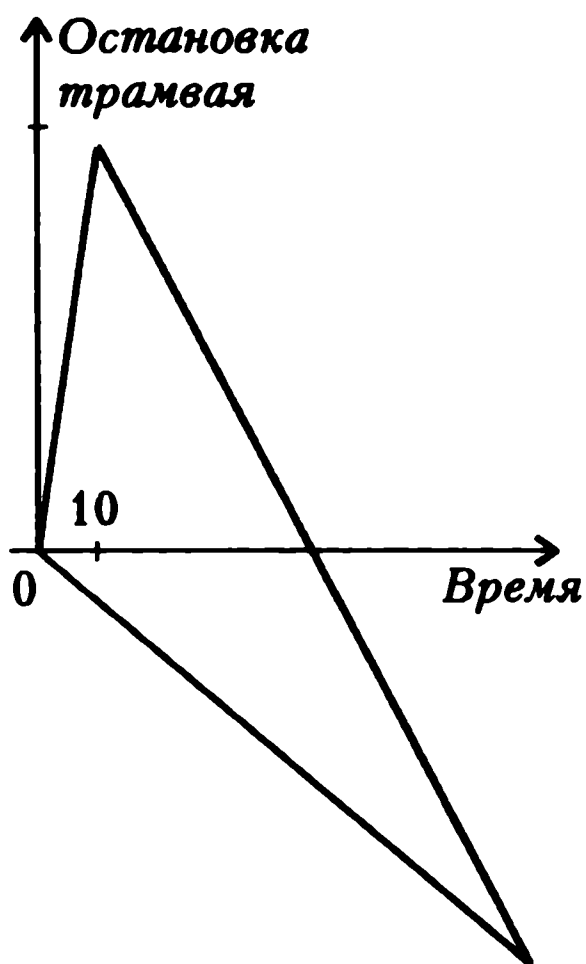


Рис. 106

Если бы он проезжал в час на 10 км больше, то тот же путь занял бы 8 часов. Какова скорость грузовика?

532. Два автомобиля одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 7 часов езды расстояние между ними было равно 136 км. Найдите расстояние между A и B , если все расстояние один может проехать за 10 часов, а другой – за 12.

533. За 5 часов мотоциклист проезжает на 259 км больше, чем велосипедист за 4 часа. За 10 часов велосипедист проезжает на 56 км больше, чем мотоциклист за 2 часа. Определите скорость велосипедиста.

533'. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5m = 4v + 259, \\ 10v = 56 + 2m. \end{cases}$$

534. Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 8 часов. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из A , была больше на 14%, а скорость автомобиля, выехавшего из B , была больше на 15%, то встреча произошла бы через 7 часов. Скорость какого автомобиля больше и во сколько раз?

535. Турист отправился из деревни на железнодорожную станцию. Пройдя за первый час 3 км, он сообразил, что опоздает к поезду на 40 минут. Поэтому остальной путь он шел со скоростью 4 км/ч и пришел на станцию за 45 минут до отправления поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

Указание. Не забудьте согласовать единицы измерения времени (попросту говоря, переведите минуты в часы).

536. Если Аня идет в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она затрачивает полтора часа. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь у нее занимает сорок минут. Сколько времени потратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы пойдет пешком?

537. Пройдя половину пути, катер увеличил скорость на 25% и потому прибыл на полчаса раньше. Сколько времени он двигался?

538. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 минут. Однажды он по дороге в школу вспомнил, что забыл дома ручку. Петя знал, что если он продолжит путь в школу с той же скоростью, то придет туда за 8 минут до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает к началу урока на 10 минут. Какую часть пути он прошел?

539. Пройдя $\frac{3}{8}$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил автомобиль, приближающийся со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста; если вперед, автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бежит Иа-Иа?

540. Проснувшись, Винни-Пух обнаружил, что ходики стоят. Он завел их и отправился в гости к Кролику.²⁷ Вернувшись, Пух правильно поставил время. Как ему это удалось?

541. На рисунке 107 показаны два способа разрезать квадрат 4×4 на две равные части. Придумайте еще 4 способа. (Резать можно только по сторонам клеточек.)

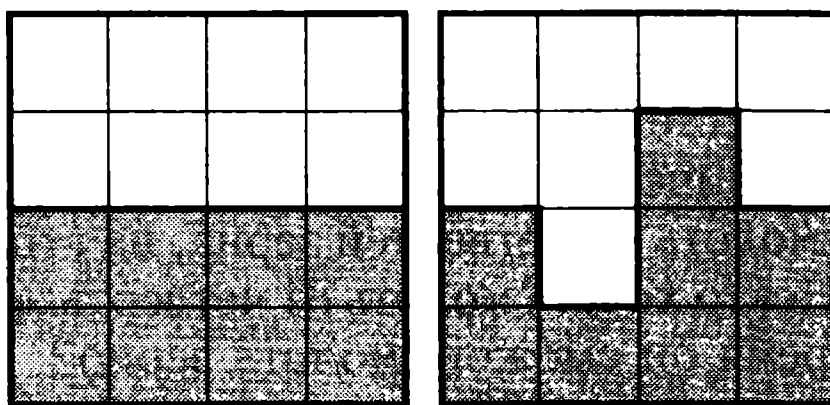


Рис. 107

542. а) Разрежьте фигуру рисунка 108,а на 4 равные части пятью разными способами. (Резать можно только по сторонам клеточек.) б) На рисунке 108,б квадрат размером 4×4 разрезан на 4 одинаковые части. Придумайте еще 4 способа. в) На рисунке 108,в квадрат размером 5×5 , из которого вырезана центральная клетка, разрезан на 4 равные части.

²⁷ У Кролика были точные часы.

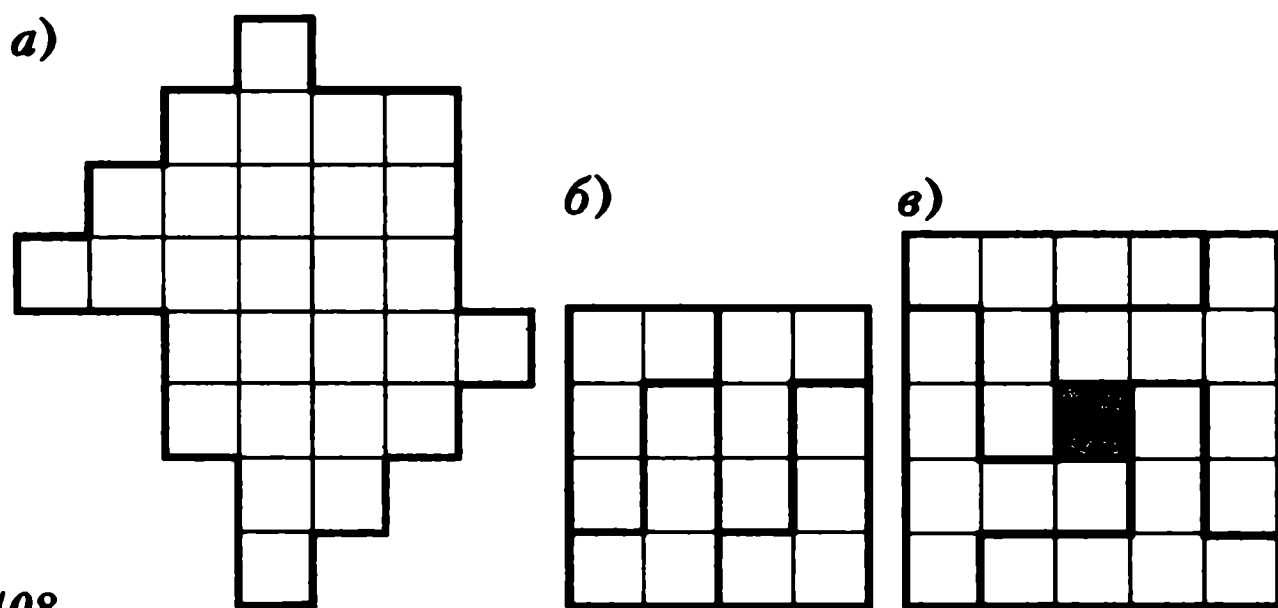


Рис. 108

Придумайте еще 6 способов. (Резать можно только по сторонам клеточек.)

53. «Совместная трапеза»

Сколько ни ем, а все аппетита нет.

С.Шамфор

543. В озере плавает яблоко: $\frac{2}{3}$ под водой и $\frac{1}{3}$ над водой. К нему подплывает рыбка и подлетает птичка, которые одновременно начинают кушать, причем птичка в два раза быстрее, чем рыбка. Какую часть яблока скушает птичка и какую – рыбка?

544. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова – за 3, овца – за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

545. На мельнице имеются три жернова. На первом за сутки можно смолоть 60 четвертей зерна, на втором – 54, а на третьем – 48. Некто хочет смолоть 81 четверть зерна. За какое наименьшее время он сможет смолоть зерно?

546. Мальш съедает 900 г варенья за 9 минут. Карлсон делает это вдвое быстрее. За сколько минут они вместе съедят 1 кг 800 г варенья?

547. В комнате оказалось 300 ведер воды. Два насоса стали выкачивать воду. Один насос за 2 часа выкачивает 48 ведер, другой за 6 часов – 129 ведер. Через сколько часов выкачают всю воду, если ежечасно с потолка поступает 8 ведер воды?

548. В бак вмещается 60 литров воды. К нему проведены две трубы. Через первую трубу за 10 минут можно наполнить пустой бак. Через вторую трубу за 15 минут можно опорожнить полный бак. Сколько воды окажется в баке через 5 минут, если открыть обе трубы?

549. Через кран вода заполняет бак за 3 часа, а через сливное отверстие вся вода из бака выливается за 5 часов. За какое время вода заполнит бак при открытых кране и отверстии? (Считайте, что скорость вытекания воды из бака не зависит от его наполненности.)

550. На уборке снега работают две машины. Одна из них может убрать всю улицу за 1 час, а другая – за 45 минут. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 минут, после чего первая машина сломалась. Сколько надо времени, чтобы вторая машина закончила работу?

551. За $3\frac{1}{2}$ часа работы первый штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Вторым пресс за 9 часов работы может изготовить 60% всех деталей. Скорость работы третьего пресса на 20% больше скорости второго пресса. За какое время будет выполнен весь заказ при одновременной работе всех трех прессов?

552. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 дней. Если бы сначала первый сделал половину работы, а затем другой – другую половину, то вся работа была бы выполнена за 25 дней. За какое время мог выполнить эту работу каждый в отдельности?

553. Трое рабочих копали канаву. Сначала первый рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, затем второй проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, и, наконец, третий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если бы с самого начала работали все трое рабочих одновременно?

554. Иван, Петр и Кирилл косили траву. Петр и Кирилл скосили бы всю траву вдвое быстрее, чем Иван. Иван и Кирилл скосили бы всю траву втрое быстрее, чем Петр. Во сколько раз быстрее, чем Кирилл, скосили бы всю траву Иван и Петр?

555. Четыре черненьких чумазеньких чертенка чертили черными чернилами чертеж четыре часа. Если бы первый чертенок чертил вдвое быстрее, а второй – вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени; если бы, наоборот, первый чертил вдвое медленнее, а второй – вдвое быстрее, то они управились бы за два часа сорок минут. За какое время начертили бы чертеж первые три чертенка без помощи четвертого?

556. Сулико подошла к роднику с кувшинами вместимостью 5 литров и 4 литра. Вода из родника текла двумя струями – одна сильнее, другая слабее. Сулико поставила оба кувшина под струи и,

когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Наполнились кувшины одновременно. Во сколько раз больше воды дает одна струя, чем другая?

557. Коза и корова съедают воз сена за 45 дней, корова и овца – за 60, а овца и коза – за 90. За сколько дней съедят воз сена коза, овца и корова вместе?

54. Мяжя Дяма

Иногда спор полезнее истины, ради которой ведется.

В.Оганян

558. Здесь зашифровано известное стихотворение. Расшифруйте его!

Мяжя Дяма клёнгё брящэд,
юлёмыря ф лэщгю нащыг.
Дыжэ, Дямэщгя, мэ брящъ,
мэ юдёмэд ф лэщгэ нащ.

559. Ковбой вошел в бар и попросил воды. Вместо ответа хозяин выхватил кольт и выстрелил в потолок. Ковбой поблагодарил и вышел. В чем дело?

560. Юноша шел по дороге и заметил валявшийся на обочине моток колючей проволоки. Он побежал домой, взял кусачки, вернулся к проволоке и одну за другой откусил все колючки. Затем он бросил проволоку и колючки там, где стоял, и продолжил свой путь, как ни в чем не бывало. В чем дело?

561. Дед Щукарь пять дней подряд работал в бригаде пахарей кашеваром, и по его невнимательности в суп каждый день попадали одна или две лягушки. За первые два дня он сварил в полтора раза больше лягушек, чем за последние два дня. В понедельник он сварил меньше лягушек, чем в пятницу. Сколько лягушек было в супе во вторник? (Подразумевается, что и в понедельник, и во вторник, и в пятницу дед Щукарь кашеварил.)

562. Марфа и Никита, встретившись на улице, увидели написанное мелом на асфальте двузначное число. Марфа прибавила к нему 4 и результат поделила на 7, а Никита поделил его на 9 и отнял от результата 1. Могли ли они получить одно и то же число?

Неверное решение. Первый способ. Марфа сначала *увеличила* число, а затем взяла от него *седьмую* часть. А Никита взял лишь *девятую* часть, которую затем еще и *уменьшил*. Очевидно, Марфа должна была получить большее число, чем Никита.

Второй способ. Из уравнения $\frac{x + 4}{7} = \frac{x}{9} - 1$ находим $x = -49,5$, что не лезет ни в какие ворота.

Тем не менее, ответ в задаче утвердительный! Марфа и Никита могли получить одинаковые результаты!

563. Проходя мимо пасеки, Вася поссорился с группой из 20 пчел. Защищаясь, он раздавил 2 пчелы, но другие 3 ужалили его. Затем Вася убил еще нескольких пчел, после чего получил ровно столько же укусов. В результате всего этого Васе досталось столько же укусов, сколько пчел осталось в живых. Сколько пчел укусили Васю?

Неверное решение. Сначала Вася раздавил две пчелы, а затем получил 3 укуса. Пусть после этого он раздавил еще x пчел и получил x укусов. Тогда $3 + x = 20 - (2 + x)$, откуда $x = 7,5$ – совершенно нелепый ответ.

55. Четность

Я делаю из мухи слона, но муха должна быть настоящей.

Ф.Искандер

Четные числа – это целые числа, которые делятся на 2 без остатка (например, 2, 4, 6, 8, 10, 0, -4, -54). Каждое такое число можно представить в виде $2k$, подобрав подходящее целое k . Например, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $0 = 2 \cdot 0$, $-1088 = 2 \cdot (-544)$.

n	...	-17	...	-1	0	1	2	3	...	100	...
$2n$...	-34	...	-2	0	2	4	6	...	200	...
$2n + 1$...	-33	...	-1	1	3	5	7	...	201	...

Нечетные числа – это те, которые при делении на 2 дают остаток 1 (например, 1, 3, 5, -1, -17). Любое такое число можно записать в виде $2k + 1$, подобрав подходящее целое k (например, $3 = 2 \cdot 1 + 1$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$). Имеется очень простой признак делимости: число делится на 2 в том и только том случае, когда его последняя цифра²⁸ (разряд единиц) есть 0, 2, 4, 6 или 8.

²⁸ Для Премудрой Софы. Мы рассматриваем десятичную систему счисления. В других системах признаки делимости тоже существуют, но формулируются иначе. Например, если пользоваться троичной системой счисления, то число делится на 2 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 2.

Мы часто будем использовать замечательные свойства:

+	Четное	Нечетное
Четное	Ч	Н
Нечетное	Н	Ч

×	Четное	Нечетное
Четное	Ч	Ч
Нечетное	Ч	Н

- *сумма четных чисел четна;*
- *сумма четного и нечетного чисел нечетна;*
- *сумма двух нечетных чисел четна.*

Докажем, например, последнее из них. Пусть одно число $2a + 1$, другое $2b + 1$. Тогда сумма $(2a + 1) + (2b + 1) = 2 \cdot (a + b + 1)$ – четное число.

564. Произведение любых двух нечетных чисел нечетно. Докажите это.

Доказательство. По таблице умножения проверяем, что произведение любых двух нечетных цифр оканчивается на нечетную цифру.

Вообще-то все правильно. Но решение некрасивое. Почему? Во-первых, это не теоретическое рассуждение, а скучная проверка – перебор. Во-вторых, важно не только формально доказать, но и понять суть явления.

Для этого нужно придумать рассуждение, которое можно использовать при решении других задач (например, при изучении делимости не на 2, а на 3). Вот это рассуждение:

$$(2a + 1)(2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2a + a + b) + 1.$$

565. а) Произведение четного числа и любого целого числа четно. Докажите это.

б) Четов пишет на доске одно целое число, а Нечетов – другое. Если их произведение четно, победителем объявляется Четов, если нечетно, то Нечетов. Может ли один из них играть так, чтобы непременно выиграть?

в) Если сумма двух целых чисел нечетна, то произведение этих чисел четно. Докажите это.

566. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 45045?

567*. Николай с сыном и Петр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Петр –

втрое больше, чем его сын. Всего поймали 25 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

Предупреждение. Многие рассуждают так: если Николай и его сын поймали по x рыб, то вместе они поймали $x + x = 2x$ рыб. Если сын Петра поймал y рыб, то Петр поймал $3y$ рыб, так что Петр с сыном вместе поймали $y + 3y = 4y$ рыб. Поскольку числа $2x$ и $4y$ четные, а число 25 нечетное, получаем противоречие.

Тем не менее, ошибки в условии нет. Такая рыбалка могла состояться!

568. Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей?

569. Можно ли так подобрать целые числа a и b , чтобы выполнялось равенство $7a + 5b = 111$, а сумма $a + b$ была бы четна?

570. На прямой отметили несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. Потом вновь между каждыми двумя соседними точками поставили по точке. И так несколько раз. Докажите, что после каждой такой операции общее количество отмеченных точек нечетно.

571. Парламент состоит из двух одинаковых палат. В голосовании участвовали все депутаты, причем воздержавшихся не было. Когда объявили, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования фальсифицированы. Как он это понял?

572. Кузнечик, попрыгав по прямой взад-вперед, вернулся в исходную точку. Зная, что длины всех прыжков одинаковы, докажите, что число их чётно.

Указание. Посмотрите на рисунок 109.

573. а) В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

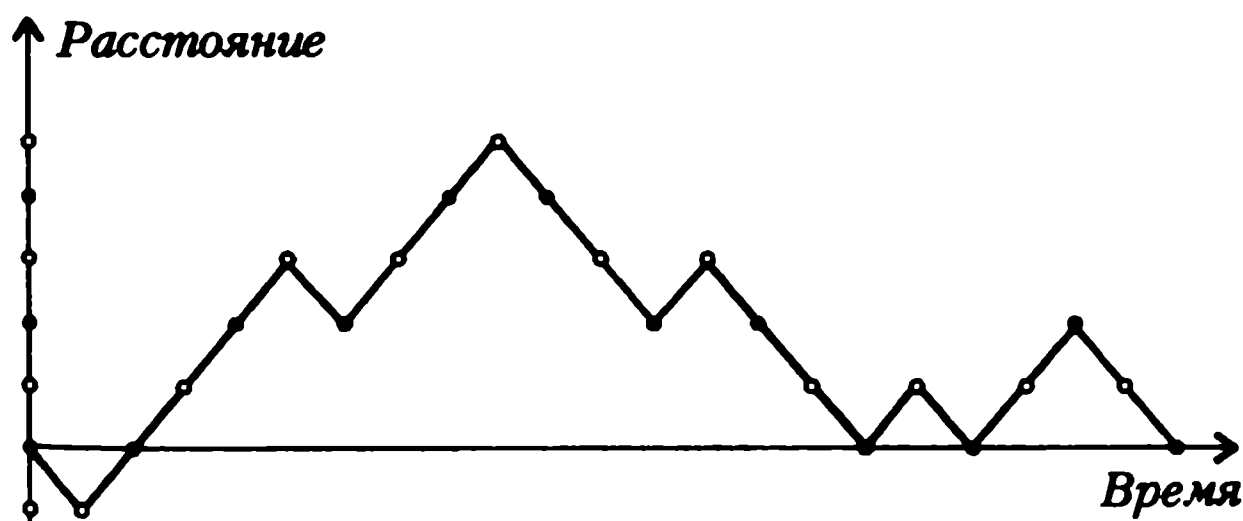


Рис. 109

6) В одну строку выписаны подряд числа 1, 2, 3, ..., 1984. Можно ли так расставить знаки «+» и «-» между ними, чтобы в результате получилось число 1985?

574. Рассмотрим первые 50 натуральных чисел. Докажите, что сумма никаких 36 из них не равна сумме 14 других.

575. На доске написаны в строку 1993 целых числа. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 1992 целых чисел?

576. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 2001 так расставить по кругу, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей?

577. На главной диагонали доски 10×10 стоит 10 шашек (все в разных клетках). За один ход разрешается выбрать любую пару шашек и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь доски?

578. После представления «Ревизора» состоялся диалог:

Бобчинский: «Это вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами так говорили!»

Добчинский: «Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это вы семгу первый заказали. Вы и сказали «Э!». А у меня зуб во рту со свистом!»

Бобчинский: «Что я первый семгу заказал, верно. И верно, что у вас зуб со свистом. А все-таки это вы первый сказали «Э!»

Кто первый сказал «Э!», если из девяти произнесенных фраз-утверждений четное число верных?

579. В забеге участвовали три бегуна: Иванов, Петров и Сидоров. Перед забегом четыре болельщика дали такие четыре прогноза:

- Победит Иванов.
- Сидоров обгонит Петрова.
- Петров финиширует следующим после Иванова.
- Сидоров не победит.

После забега оказалось, что среди прогнозов было четное число верных. В каком порядке финишировали бегуны?

56. Чередование

То взлет, то посадка...

Ю. Визбор

580. По кругу зацеплены 9 шестеренок: первая со второй, вторая с третьей, ..., девятая с первой (рис. 110). Могут ли они вращаться?

581. Пожалованный землей за великие дела Мюнхгаузен нарисовал свой замок, ближние деревни и границы своих владений. Королевский картограф заверил рисунок. Во время бунта рисунок загорелся, но барон спас кусочек (рис.111).

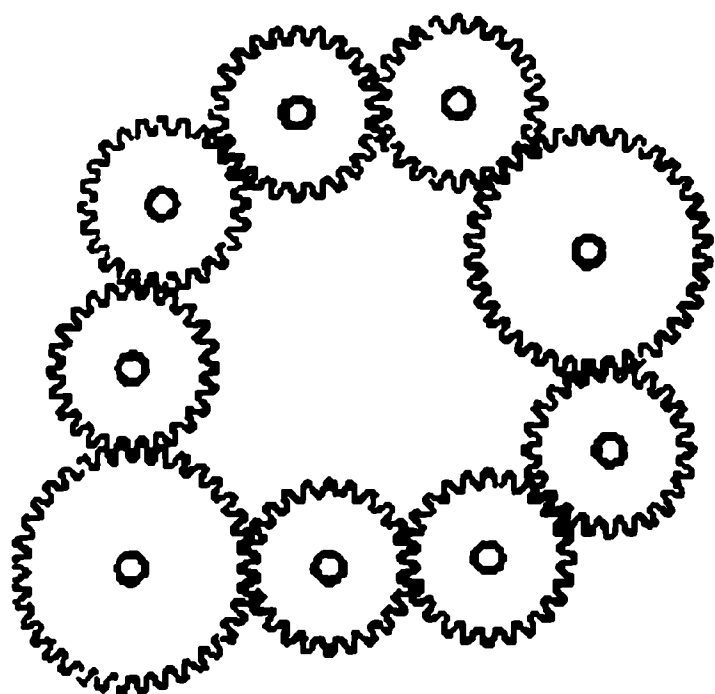


Рис.110

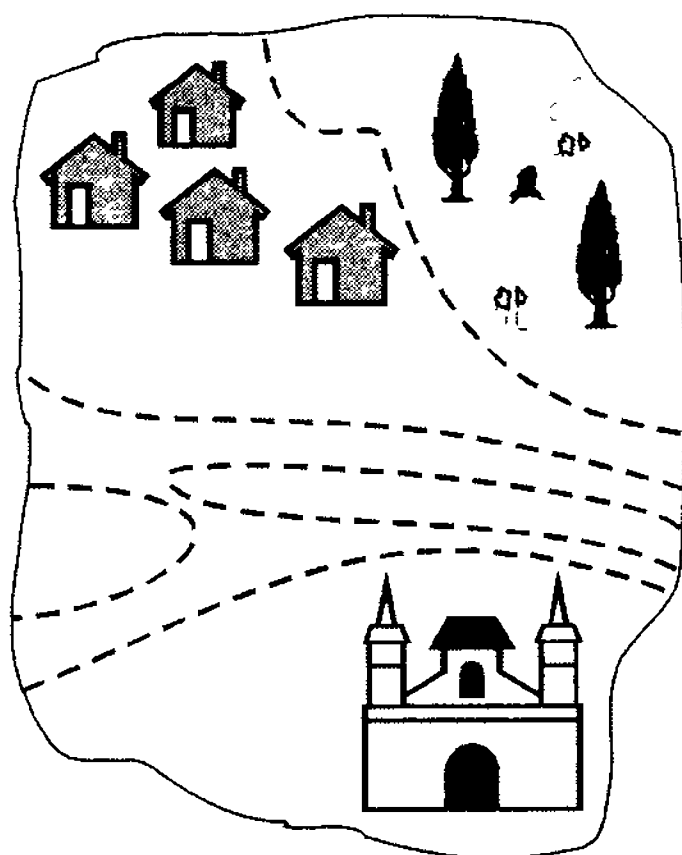


Рис.111

В суде жители отмеченной на нем деревни утверждают, что живут не на земле барона. Он не согласен. Кто прав?

582. На рисунке 112 прямая пересекает все стороны шестиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны 11-угольника, не проходя ни через одну его вершину?

583. а) Конь вышел с некоторого поля шахматной доски и через несколько ходов вернулся на это поле. Докажите, что он сделал четное число ходов.

б) Из шахматной доски выпилили одно угловое поле. Может ли конь обойти все оставшиеся поля по одному разу и вернуться на исходное поле?

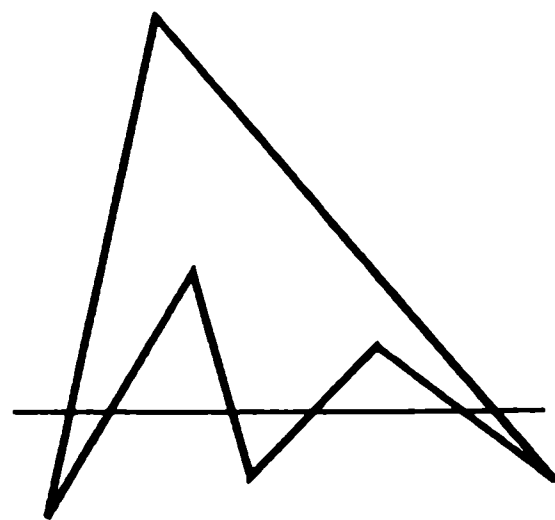


Рис.112

584. Мог ли конь пройти из левого нижнего угла шахматной доски (размером 8×8) в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

585. Фишка стоит в левом нижнем углу доски размером 4×4 . За один ход она может передвинуться на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каких клеток доски она может достичь, побывав

предварительно ровно по одному разу на каждой из остальных клеток? (На рисунке 113 показано, как она может достичь левого верхнего угла.)

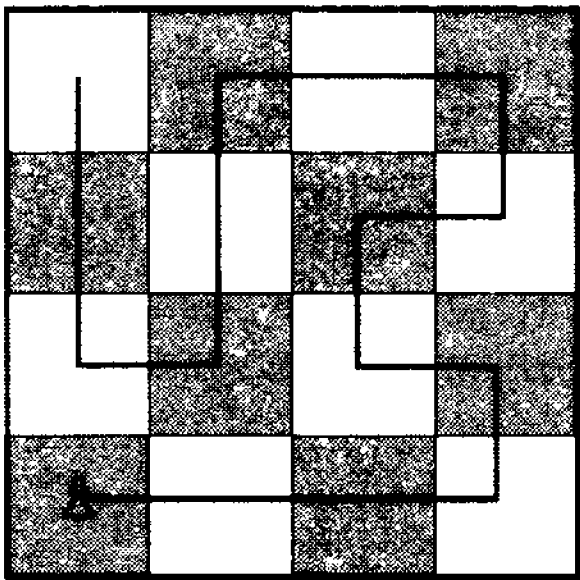


Рис.113

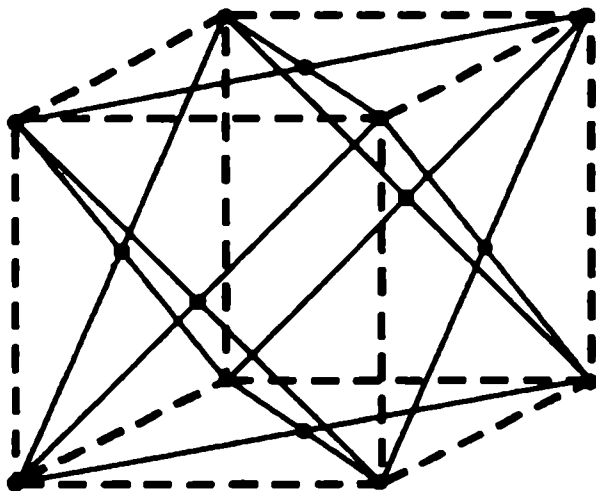


Рис.114

586. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней (рис.114). Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

587. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к кубику, имеющему общую грань с предыдущим.

Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика²⁹? А если бы куб имел размеры 13×13×13?

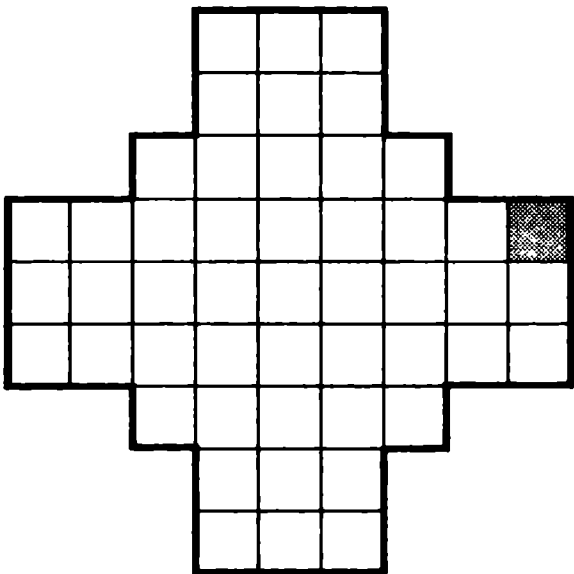


Рис.115

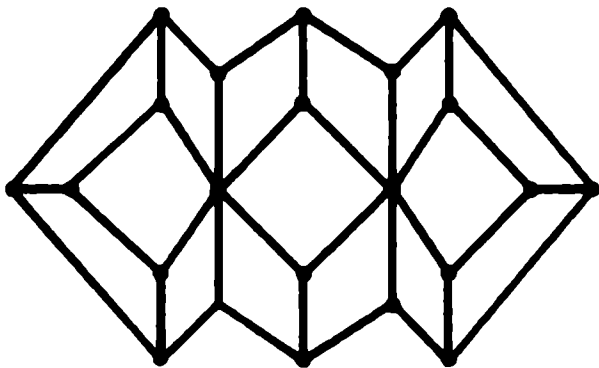


Рис.116

588. а) Обойдите изображенную на рисунке 115 доску, побывав на каждой клетке ровно один раз. (Переходить с клетки на клетку можно только через отрезочек, а не через угол. Возвращаться на исходную клетку не обязательно.) б) Можно ли сделать это, начав с отмеченной клетки?

²⁹ Именно там, в центральном кубике, спрятан крючок мышеловки.

589. Схема городов и дорог в некотором государстве изображена на рисунке 116. Можно ли обойти все города, побывав в каждом из них по одному разу?

57. Разбиение на пары

590. Если 11-угольник имеет ось симметрии, то она проходит через одну из его вершин. Докажите это.

591. На доске размером 17×17 стоят 11 пешек.

а) Их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что хотя бы одна пешка стоит на ней.

б) Их расположение симметрично относительно главных³⁰ диагоналей. Докажите, что какие-то три пешки – на одной из них.

592. а) Может ли 11-звенная ломаная пересекать каждое свое звено ровно один раз?

б) Нарисуйте замкнутую шестизвенную ломаную, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз.

в) Из скольких звеньев может состоять ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно один раз?

Пояснение. Ломаная получается, если, не отрывая руку от бумаги, проводить отрезки. Замкнутой называют линию, начало которой совпадает с концом. Пятиугольная звезда (рис.117,а) –

пример замкнутой ломаной. К сожалению, она пересекает каждое свое звено дважды. Два ромба (рис.117,б) дают пример системы отрезков, каждый из которых пересечен одним другим отрезком. Но два ромба – это не одна, а две замкнутые ломаные.

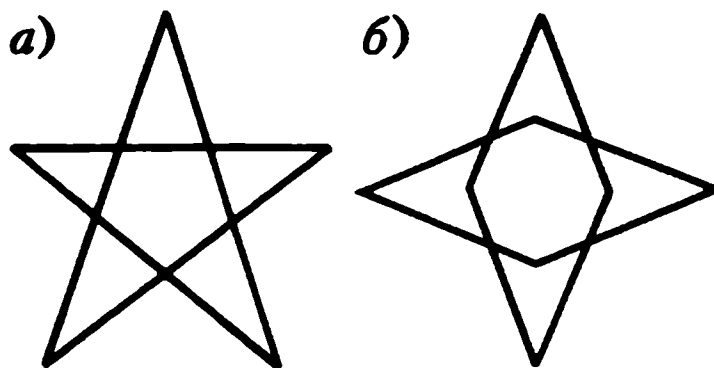


Рис. 117

593. По окончании игры все кости домино выложены в цепочку. На одном конце – пятерка. Что на другом?

594. а) На доске размером 6×6 расставьте 8 ферзей так, чтобы каждый из них бил ровно одного ферзя.

³⁰ Т.е. самых длинных. (Таковых две. На доске размером $n \times n$ они имеют общую клетку, если n нечетно, и не имеют общих клеток, если n четно. Поэтому расположить нечетное число пешек симметрично относительно обеих главных диагоналей на доске $n \times n$ можно только при нечетном n .)

6) Можно ли так расставить 9 ферзей?

595. В роте 100 человек. Каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый единожды подежурил с каждым?

596. При каких n ладья, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, может за n^2 ходов побывать на всех клетках доски размером $n \times n$ и вернуться на исходное поле?

(Учитываются только поля, на которых ладья останавливалась, а не те, над которыми она проносилась во время хода. За каждым горизонтальным ходом должен следовать вертикальный, а за вертикальным – горизонтальный.)

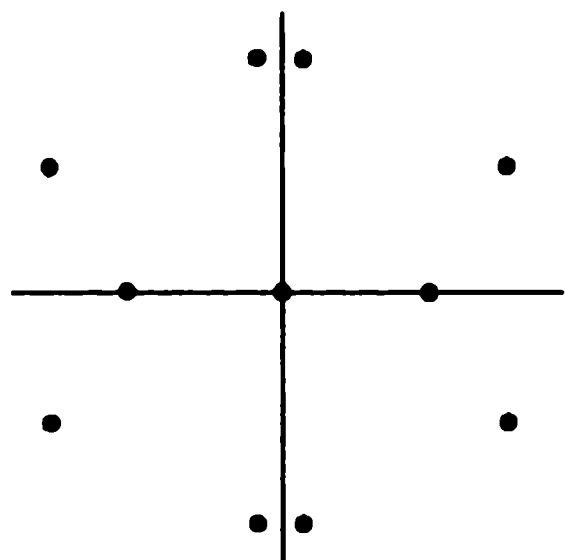


Рис. 118

597. а) Докажите, что выпуклый 77-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.³¹

б) Существует ли 7-угольник, который можно разрезать на параллелограммы?

598. На плоскости симметрично относительно некоторых двух (или более) прямых расположены 11 точек (пример такого расположения – на рисунке 118). Обязана ли одна из этих точек быть точкой пересечения прямых?

Указание. Прямые не обязательно перпендикулярны. Лучше начать решение с более простого случая 3 точек. Затем разберите случай с 5 точками. После этого не составит труда решить задачу для 11 точек.

58. Черно-белые задачи

599. Можно ли разбить на доминошки (каждая – из двух клеток) шахматную доску без противоположных углов $a1$ и $h8$ (рис. 119)?

600. Можно ли из пяти фигур рисунка 120 сложить прямоугольник размером 4×5 ?

601. Замок имеет вид прямоугольника размером 5×7 клеток. Каждая клетка, кроме центральной, – комната замка,

³¹ Не забудьте, к одной стороне многоугольника могут примыкать несколько параллелограммов.

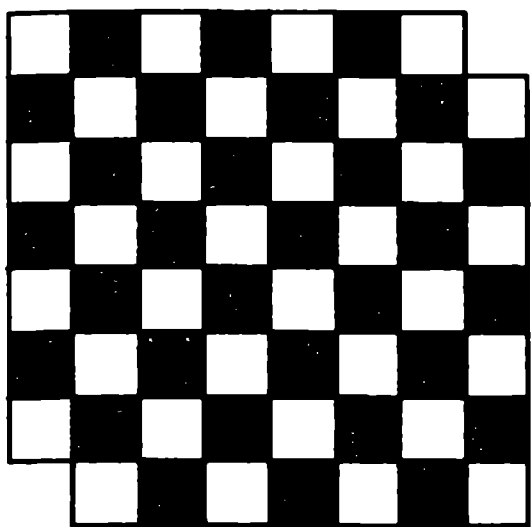


Рис. 119

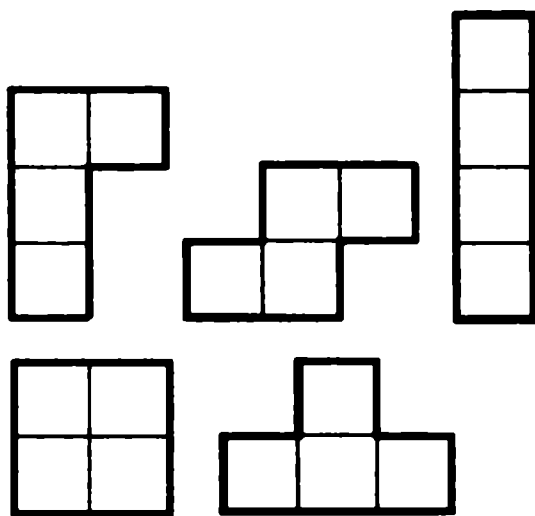


Рис. 120

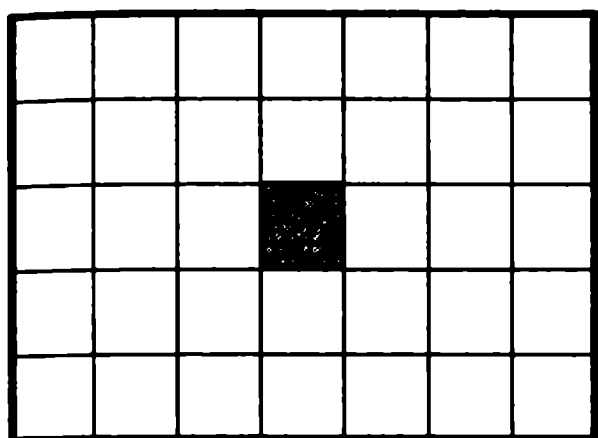


Рис. 121

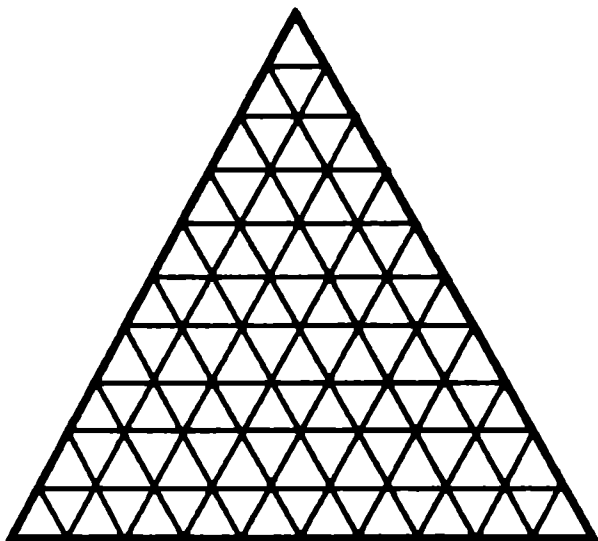


Рис. 122



Рис. 123

а в центральной клетке находится бассейн (рис.121). В каждой стене (стороне клетки), разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

602. Докажите, что доску размером 50×50 нельзя разрезать на фигуры из четырех клеток в форме буквы Т.

603. Треугольный замок разделен на 100 одинаковых треугольных залов (рис.122). В середине каждой стены между залами сделана дверь. Сколько залов сможет осмотреть человек, не желающий нигде побывать более одного раза?

604. Какое наибольшее количество ромбов, каждый из которых составлен из двух равносторонних треугольничков (рис.123), можно вырезать из равностороннего треугольника рисунка 122? (Для простоты считайте, что резать можно только по сторонам треугольничков.)

605*. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать фигуру рисунка 124? (Резать можно только по границам клеток.)

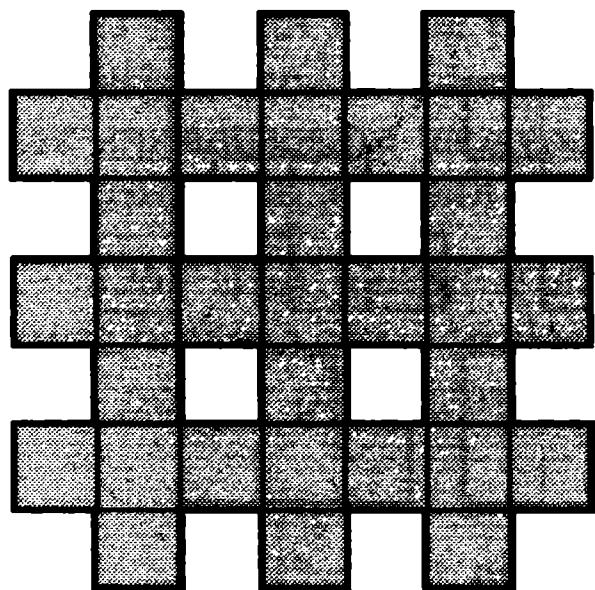


Рис.124

606. 25 жуков сидели по одному на клетках доски 5×5 . Каждый перелетел на соседнюю³² клетку. Докажите, что хотя бы одна клетка освободилась.³³

607. Через клетчатый квадрат 100×100 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в синий и красный цвета. Докажите, что количество синих клеточек четно.

608. Можно ли шахматную доску разрезать на 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

609. Шахматную доску покрыли костями домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Восемь костей покрывают восемь клеток одной из диагоналей доски; при этом некоторые из них покрывают еще одну клетку выше диагонали, а другие – еще одну клетку ниже ее. Докажите, что при любом покрытии доски тех и других поровну.

59. Эйлеровы пути

Безвыходных положений нет. Но есть положения, в которые нет никакого входа.

А.Фюрстенберг

610. Можно ли, не оторвав карандаш от бумаги и не проводя никакой линии более одного раза, нарисовать а) открытый (рис.125,а); б) закрытый (рис.125,б) конверт?

611. Нарисуйте одним росчерком, не проводя ни одной линии дважды, рисунки 126,а,б.

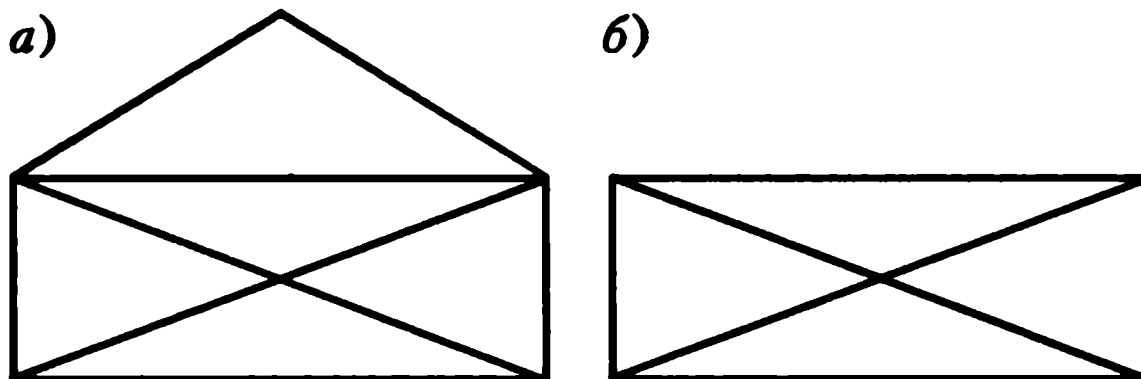


Рис.125

³² По горизонтали или вертикали, т.е. соседними называются клетки, имеющие общую сторону.

³³ Т.е. хотя бы на одну клетку прилетели 2 жука или более.

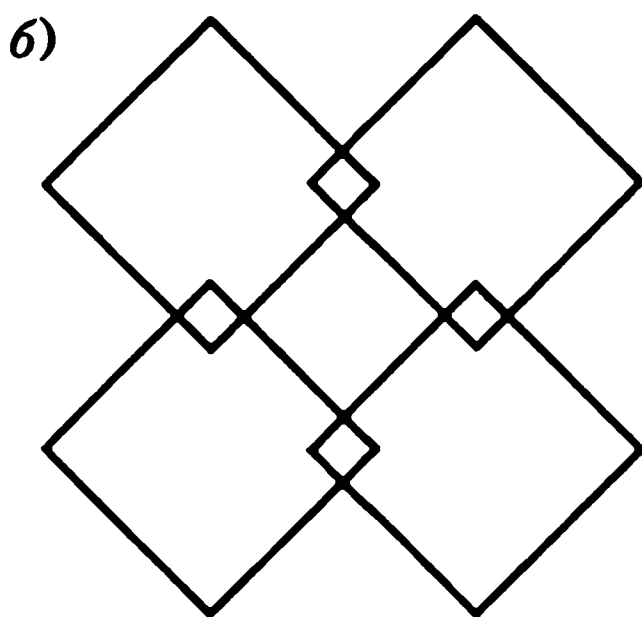
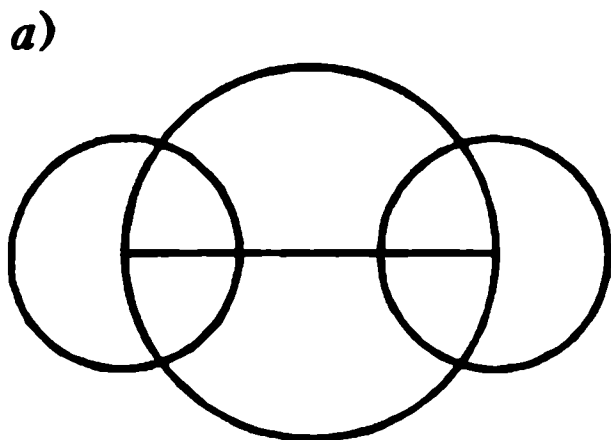


Рис.126

612. Выскочив из норы *A*, заяц побегал по снегу, оставляя след, и спрятался под одним из деревьев *B*, *C*, *D*, *E*, *F* (рис.127). Под каким?

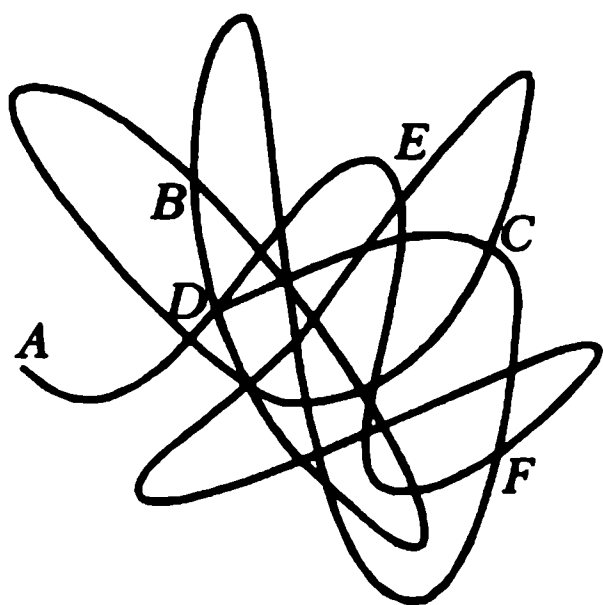


Рис.127

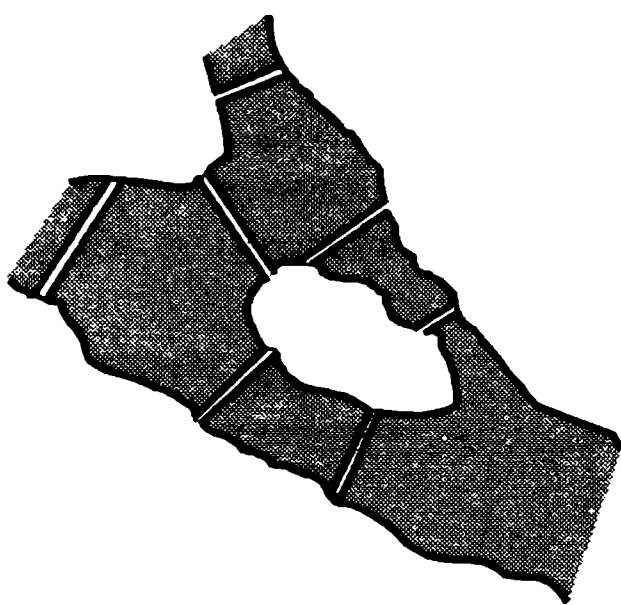


Рис.128

613 (*Задача Эйлера о мостах Кёнигсберга*). Можно ли, гуляя по городу (рис.128), пройти по каждому мосту ровно один раз?

614. а) Из куска проволоки длиной 120 см, не ломая ее, нельзя сделать каркас куба с ребром 10 см. Докажите это.

б) Найдите минимальную длину куска проволоки, из которой можно сделать этот каркас, изгибая, но не ломая.³⁴

615. а) Линия, проведенная на рисунке 129,а, пересекает 14 отрезков – все, кроме трех. Можно ли провести линию, которая по одному разу пересекает каждый из 16 отрезков?

б) А на рисунке 129,б?

616*. а) Можно ли так пометить вершины правильного 45-угольника цифрами 0, 1, ..., 9, чтобы для любой пары

³⁴ Вдоль части ребер проволока пройдет несколько раз.

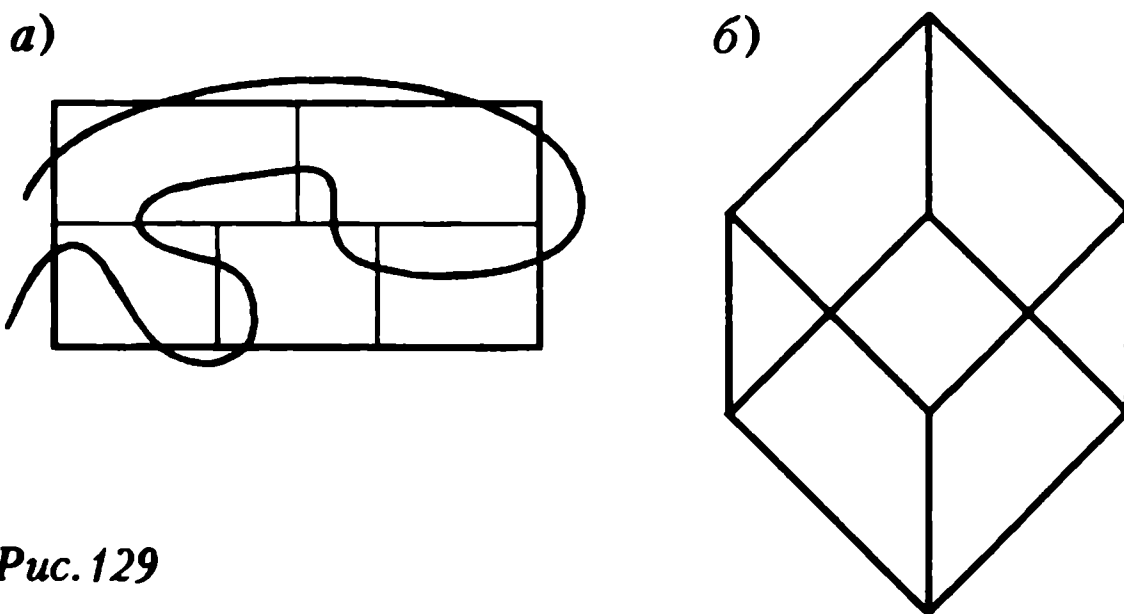


Рис. 129

различных цифр нашлась сторона, концы которой помечены этими цифрами?

б) При каких n можно пометить вершины правильного $\frac{n(n-1)}{2}$ -угольника числами от 1 до n так, чтобы для каждой пары различных натуральных чисел, не превосходящих n , нашлась сторона, концы которой помечены этими числами?

617. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?

60. Инварианты

Зимой и летом одним цветом.

В следующих задачах решение состоит в предъявлении некоторой величины, четность которой или вовсе не меняется, или меняется известным нам способом.

618. На столе лежат а) 2; б) 22 монеты. Петя закрывает глаза, а Витя переворачивает монеты (по одной), говоря при каждом переворачивании «Хоп!» (он может переворачивать одну монету несколько раз, не забывая всякий раз сказать «Хоп!»).

После этого Витя накрывает одну из монет рукой, а Петя открывает глаза и отгадывает, как лежит невидимая монета – гербом вверх или вниз. Как Петя это делает?

619. а) На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Разрешено переворачивать одновременно любые два стакана. Можно ли поставить все стаканы дном вниз?

б) 30 пятаков лежат гербом вверх. Разрешено за раз перевернуть любые 29 из них. Можно ли добиться, чтобы все пятаки легли гербом вниз?

в) То же для 15 пятаков, переворачиваются – 14.

620. Каждая из расположенных по кругу 12 ламп может находиться в одном из двух состояний: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трех ламп, расположенных подряд. Вначале горит только одна лампа. Можно ли добиться того, чтобы горели все 12 ламп?

621. Круг разбит на 6 секторов. В секторах стоят 6 шашек, по одной в каждом. За один ход разрешается передвинуть две шашки на один сектор каждую (в одинаковых или противоположных направлениях). Можно ли за несколько ходов собрать все шашки в одном секторе?

621'. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.

А если чижей и деревьев n ?

622. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, расположенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли так уравнять все числа, если в начале они таковы, как показано на рисунке 130?

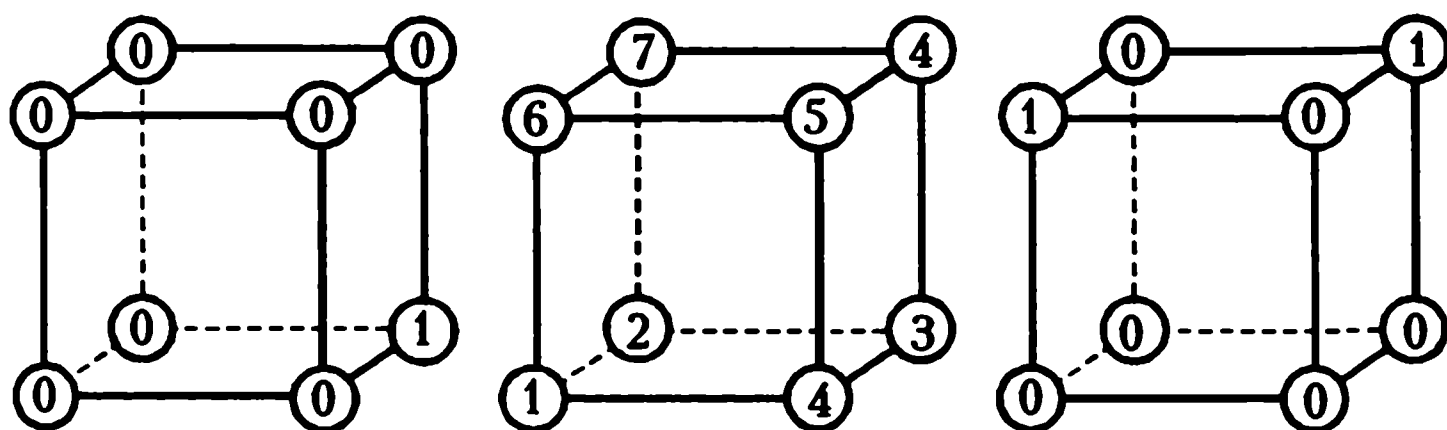


Рис. 130

623. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешено к любым двум из них прибавить по 1. Можно ли уравнять числа, сделав это несколько раз?

61. Подсчет двумя способами

Что в лоб, что по лбу.

624. В конференции участвовали 19 ученых. После ее окончания каждый из них отправил 2 или 4 письма другим участникам конференции. Могло ли случиться, что каждый участник получил ровно 3 письма? (Письма на почте не теряют!)

Указание. Количество отправленных писем четно. Если бы каждый получил по 3 письма, то количество полученных писем равнялось бы $19 \cdot 3 = 57$.

625. Несколько шестиклассников и семиклассников обменялись рукопожатиями. При этом каждый шестиклассник пожал руку семи семиклассникам, а каждый семиклассник – шести шестиклассникам. Кого среди них было больше – шестиклассников или семиклассников?

625'. В стране Карабабасии живут карабасы и барабасы. Каждый карабас дружит с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас дружит с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше – карабасов или барабасов?

626. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми (рис.131). Сколько лоскутов белого цвета?



Рис.131

627. Взяли несколько одинаковых правильных треугольников. Вершины каждого из них поместили цифрами 1, 2 и 3. Затем их сложили в стопку. Могло ли оказаться, что сумма чисел, находящихся в каждом углу, равна 55?

628. Куб $3 \times 3 \times 3$ составлен из 14 белых и 13 черных кубиков. Столбик – это три кубика, стоящие подряд вдоль одного направления: ширины, длины или высоты. Может ли быть так, что в каждом столбике нечетное количество а) белых; б) черных кубиков?

629. У марсиан бывает не только 2, 1 или 0 рук, как у людей, а любое число. Однажды все марсиане взяли за руки. Свободных рук не осталось. Докажите, что число нечетноруких марсиан четно.

630. У царя Никиты было 45 сыновей. Он завещал им разделить между собой царство таким образом, чтобы земли каждого из них граничили с землями ровно 3 или 7 его братьев. Призадумались братья. Смогут ли они выполнить волю отца?

631. Не существует выпуклого многогранника, у которого число граней нечетно, а каждая грань имеет нечетное число вершин. Докажите это.

632. Существует ли 1989-звенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно 3 раза?

633. Квадрат разрезали на прямоугольники так, что никакая его точка не оказалась вершиной сразу четырех прямоугольников. Докажите, что число точек, являющихся вершинами прямоугольников, четно.

634. В некоей стране некие города связаны авиалиниями (с двусторонним движением). Из столицы выходит 1981 авиалиния, из города Дальний – одна авиалиния, а из остальных – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь до Дальнего (возможно, с пересадками).

635. По окончании балльных танцев³⁵ участники (в беспорядке, мальчики и девочки) назвали количество своих выступлений:

3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

Не ошибся ли кто-нибудь?

Решение. Сумма чисел, названных всеми мальчиками, равна числу выступлений и потому должна совпадать с суммой чисел, названных девочками. Но все числа, кроме одного, делятся на 3.

636. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечетное число фигур? (Угловое поле – это тоже диагональ!)

637. На шахматной доске 9×9 расставлены 9 ладей, не бьющих друг друга. Каждую из этих ладей передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

638*. Даны двадцать карточек, на каждой из которых написана одна цифра (0, 1, 2, ..., 9), причем каждая цифра написана на двух карточках. Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками – две и так далее до девяток, между которыми должно лежать девять карточек?

62. Сумма и среднее арифметическое

– Какая сегодня средняя температура по больнице? – спросил ревизор главврача.

639. Два человека отправились на рынок продавать яблоки. У них было по 30 яблок. Один собирался

³⁵ В каждом танце участвовало несколько пар, от танца к танцу пары могли перемешиваться, в некоторых танцах некоторые могли и не участвовать, отдыхать. Число мальчиков не обязано совпадать с числом девочек.

продавать по 2 яблока за 1 рубль, а другой – по 3 яблока за 1 рубль. Перед началом торговли первого продавца вызвали домой, и он попросил второго продавца продать его яблоки. Тот стал продавать по 5 яблок за 2 рубля. Если бы они торговали порознь, то выручили бы 10 рублей и 15 рублей, а продавая по 5 яблок за 2 рубля, они получили 24 рубля. Куда исчез рубль?

640. В магазине есть на равную сумму конфеты стоимостью 2 рубля за килограмм и стоимостью 3 рубля за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?

641. Разбейте {1, 2, 9, 25, 49, 64} на две группы, чтобы сумма чисел одной группы была равна сумме чисел другой.

1	9	16	7	12	5	4	3
8	15	10	2	13	6	11	14

Рис.132

642. Разделите полоску (рис.132) на 4 одинаковые части, чтобы все части имели одну и ту же сумму входящих в них чисел.

643. Когда Миша поступал в МГУ, учитывался средний балл аттестата о среднем образовании по двенадцати предметам. У Миши средний балл 3,5. По скольким предметам ему нужно было повысить оценку на один балл, чтобы средний балл оказался 4?

644. Средний возраст 11 игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся игроков – 21 год. Сколько лет получившему травму?

Тайна вклада в общее дело – гарантируется.
С.Лузан

645. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня – 50 кг, Маня и Ваня – 90 кг, Ваня и Даня – 100 кг, Даня и Аня – 60 кг. Сколько весит Аня?

646. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго – 85, без третьего – 80, без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?

646'. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + z + t = 90, \\ x + z + t = 85, \\ x + y + t = 80, \\ x + y + z = 75. \end{cases}$$

647. На каждой стороне шестиугольника написали по числу. Затем записали в каждой вершине сумму двух ее чисел³⁶ и стерли все числа на сторонах и одно число в вершине (рис.133). Можно ли восстановить число в вершине?

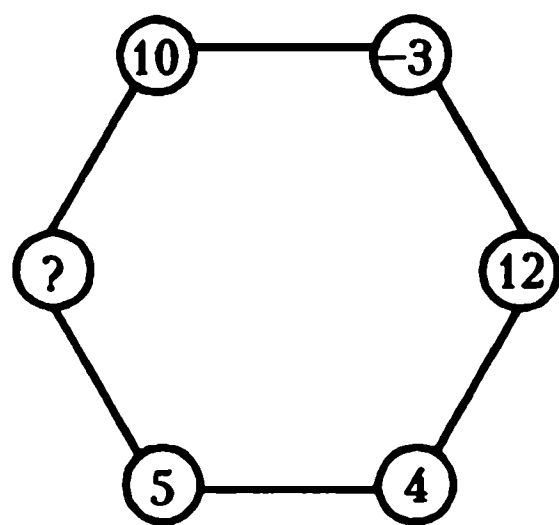


Рис.133

648. В вершинах треугольника записали три числа. После этого на каждой стороне написали сумму чисел в ее концах. Получились числа 1990, 1991 и 1992. Какие числа были в вершинах?

649. Катя, Лена, Маша, Нина участвовали в концерте. Каждую песню пели 3 девочки. Катя пела 8 песен – больше всех; Нина меньше всех – 5 песен. Сколько песен было спето?

650. Имеется 13 чисел, равных 1,1, и 15 чисел, равных 1,11. Можно ли разбить их на две группы, чтобы сумма чисел одной группы была равна сумме чисел другой группы?

651. На доске написано несколько ненулевых чисел. Каждое из них равно полусумме остальных. Сколько чисел на доске?

652. По кругу записаны 8 чисел так, что каждое из них равно сумме трех следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что все эти числа равны нулю.

653. В соревнованиях по стрельбе участвовали 30 человек. Первый стрелок выбил 80 очков, второй – 60 очков, третий выбил среднее арифметическое чисел очков первых двух, четвертый – среднее арифметическое чисел очков первых трех. И вообще, каждый следующий выбивал среднее арифметическое чисел очков, выбитых всеми предыдущими стрелками. Сколько очков выбил последний стрелок?

654. В вершинах куба записано по натуральному числу. В середине каждого ребра записана сумма чисел, находящихся на концах этого ребра, а в центре каждой грани – сумма чисел, находящихся в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 26 чисел равняться 1992?

655. Можно ли натуральные числа от 1 до 30 записать в таблицу из 5 строк и 6 столбцов так, чтобы все шесть сумм чисел, стоящих в столбцах, были равны?

656. Можно ли заполнить числами таблицу размером а) 5×5 ; б) 6×6 так, чтобы произведение всех чисел любой

³⁶ Для Премудрой Софы. Точнее говоря, записали сумму чисел, соответствовавших выходящим из этой вершины сторонам.

строки было отрицательно, а произведение всех чисел любого столбца – положительно?

656'. Можно ли расставить числа в таблице размером 19×66 так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительна, а в каждом столбце – отрицательна?

657. Расставьте в кружочках рисунка 134 числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы суммы всех пяти троек чисел, расположенных «на отрезках», были равны между собой.

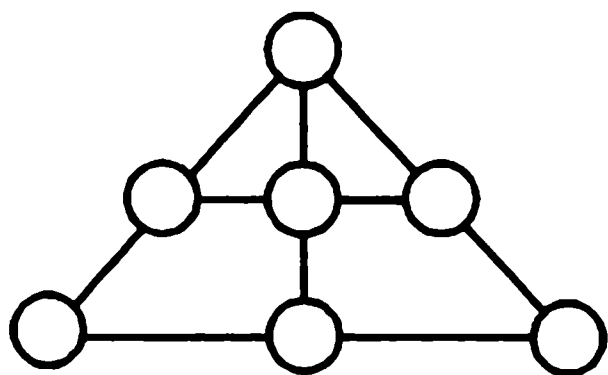


Рис. 134

Указание. Обозначьте число, стоящее в верхнем кружочке, через x , а сумму тройки чисел на каждом «отрезке» через s . Сумма этих сумм по трем «отрезкам», выходящим из верхнего кружка, равна $3s$; при этом каждое из чисел в кружочках входит

в эту сумму по одному разу, кроме числа x , которое входит три раза. Отсюда $3s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 2x$, т.е. $3s = 28 + 2x$. Если же мы сложим числа лишь по двум горизонтальным «отрезкам», то получим сумму шести чисел из семи, т.е. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - x$. Следовательно, $2s = 28 - x$, откуда $x = 28 - 2s$. Подставив x в первое уравнение, получим $3s = 28 + 2(28 - 2s)$, откуда $s = 12$ и $x = 28 - 2s = 4$.

658. Можно ли по кругу расставить 7 целых чисел так, чтобы сумма любых трех соседних равнялась 19?

659. Мюнхгаузен расставил на ребрах куба числа 1, 2, 3, ..., 12. Затем на каждой грани куба он написал сумму чисел, стоящих на ее сторонах. Могли ли на всех гранях оказаться одинаковые суммы?

Указание. Если сложить все суммы, то получим равенство

$$6s = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12),$$

где s – число, которое Мюнхгаузен написал на всех гранях. Пользуясь известным приемом, можно быстро посчитать правую часть полученного равенства:

$$\begin{aligned} 6s &= (1 + 12) + (2 + 11) + \\ &\quad + (3 + 10) + \dots + (10 + 3) + (11 + 2) + (12 + 1), \\ 6s &= 12 \cdot 13, \end{aligned}$$

откуда $s = 26$. Значит, надо стараться, чтобы суммы чисел на

гранях были равны 26. Сделайте это! (Советую при решении этой задачи рисовать куб так, как на рисунке 135.)

660. Расставьте числа 1, 2, ..., 8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани были равны между собой.

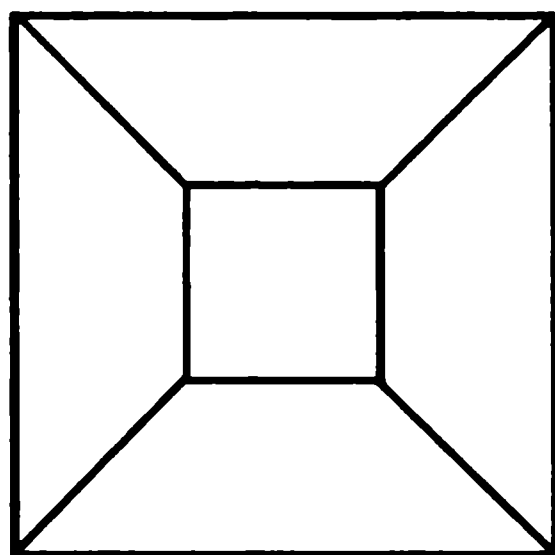


Рис. 135

661. Решите системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{7}{12}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} xy = 9z, \\ yz = 100x, \\ xz = 4y; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = 1,5, \\ \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 0,7, \\ \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} = 1,2. \end{cases}$$

662. Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Площади некоторых из них указаны на рисунке 136. Найдите площадь прямоугольника, отмеченного вопросительным знаком.

663. За 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии – 21 динар, за 5 крон – 2 талера, а за 10 рупий – 3 талера. Сколько тугриков можно выручить за 13 крон?

?				20
			14	10
		32	28	
	35	40		
9	21			

Рис. 136

Указание. Отношение стоимости тугрика к стоимости динара 14:11, динара к рупии 22:21, рупии к талеру 3:10, талера к кроне 5:2. Перемножьте эти дроби.

63. Средняя скорость

664. Метрострой нанял двух кротов для рытья туннеля. Один из них копает быстрее другого, а едят они одинаково. Что выгоднее (в смысле затрат продуктов): копать с двух сторон до встречи или копать каждому половину туннеля?³⁷

³⁷ Кто не работает, тот не ест!

665. Автомобиль половину пути ехал со скоростью 50 км/ч, а вторую половину – со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость? ³⁸

666. Два путника одновременно вышли из пункта А в пункт В. Первый половину расстояния шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину – со скоростью 4 км/ч. А второй путник половину времени, затраченного им на переход, проходил по 5 км в час, а затем вторую половину времени – по 4 км в час. Кто из них раньше пришел в пункт В?

Пояснение. Пусть расстояние между пунктами А и В равно 1000 км, а скорости (вместо данных в задаче 5 км/ч и 4 км/ч) пусть равны 1000 км/ч и 1 км/ч.

Тогда первый путник, мчавшийся одну половину расстояния со скоростью 1000 км/ч, а другую половину шедший со скоростью 1 км/ч, потратил $\frac{1}{2} + 500$ часов.

Второй путник потратил менее 2 часов. (Ровно два часа он потратил бы, если бы первую половину времени мчался со скоростью 1000 км/ч, а вторую просто стоял неподвижно. Если угодно, можно точно найти затраченное им время t из уравнения $1000 \cdot \frac{t}{2} + 1 \cdot \frac{t}{2} = 1000$. Очевидно, $t = \frac{2000}{1001} < 2$.)

667. Белка за 20 минут приносит орех в гнездо. Далеко ли орешник от гнезда, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом – 3 м/с?

668. Сначала самолет летел со скоростью 180 км/ч, а когда ему осталось лететь на 320 км меньше, чем он пролетел, он увеличил скорость до 250 км/ч. Оказалось, что средняя скорость самолета на всем пути 200 км/ч. Сколько времени длился полет?

669. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/ч?

670. На дороге, соединяющей два аула, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 15 км/ч, а под гору – 30 км/ч. Найдите расстояние между аулами, если известно, что путь туда и обратно автобус проезжает за 4 часа без остановок.

³⁸ *Средняя скорость* – это отношение всего пройденного пути ко всему затраченному времени.

671. Дорога между городами A и B состоит только из подъемов и спусков. Расстояние между A и B равно 160 км.

а) Найдите среднюю скорость автобуса, проехавшего из A в B и обратно, если его скорость на подъеме равна 40 км/ч, а скорость на спуске — 80 км/ч.

б) Зависит ли значение средней скорости от расстояния между городами?

672. Путешественник вышел из гостиницы в 3 часа дня и возвратился в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он шел со скоростью 4 км/ч, в гору — 3 км/ч, под гору — 6 км/ч. Найдите расстояние, которое прошел путешественник, если он нигде не останавливался.

673. Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля со скоростями 30 км/ч. Одновременно из A вылетел со скоростью 70 км/ч неутомимый шмель. Встретив автомобиль, выехавший из B , он сразу полетел обратно к A . Повстречав выехавшего из A , он полетел обратно к B и так летал, пока машины не встретились.

Какое расстояние пролетел шмель, если между A и B 300 км?³⁹

674. Первый путешественник был на 3 км впереди второго и шел со скоростью 4 км/ч, второй — со скоростью 5 км/ч. Собака побежала со скоростью 15 км/ч от одного из них к другому, затем вернулась, и бегала так, пока они не встретились. Сколько километров пробежала собака?

64. Последняя цифра

Полезные истины следует говорить и повторять как можно чаще.

П.Буаст

Последняя цифра произведения (суммы, разности) зависит только от последних цифр чисел, над которыми производится арифметическое действие.

675. Найдите последнюю цифру числа

$$111 \cdot 222 \cdot 333 \cdot 444 \cdot 555 \cdot 666.$$

676. Какой цифрой оканчивается произведение всех нечетных чисел от 1 до 51?

³⁹ Знайка почти мгновенно ответил на этот вопрос, а на изумленное «Как можно было так быстро все посчитать?» пошутил: «Конечно же, я просуммировал геометрическую прогрессию!»

677. Замените звездочки цифрами так, чтобы получился правильный пример на умножение.

$$\begin{array}{r} \times \quad ****7 \\ \quad *** \\ \hline \quad ****6 \\ + \quad **203 \\ \quad *37** \\ \hline \quad ***** \end{array}$$

678. Найдите остаток от деления $43^{43} - 17^{17}$ на 10.

679. В магазин привезли 223 литра масла в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов?

680. Последняя цифра любого целого числа совпадает с последней цифрой его пятой степени. Докажите это.

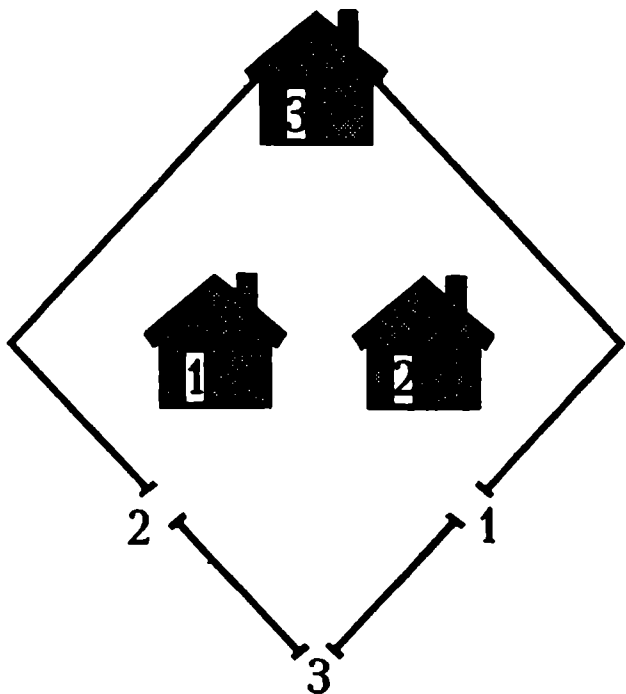


Рис. 137

681. На квадратном участке расположены три дома (рис.137), а в ограде сделаны три калитки. От каждого дома проложите дорожку к калитке с тем же номером, чтобы дорожки не пересекались.

682. Внутри круга отметили точку А. Разрежьте круг на две части и расположите их так, чтобы получился круг с центром А.

683. Поставьте на доску 10×10 шесть ферзей, чтобы все поля были биты⁴⁰.

65. Остатки

По определению делимости, $3n$ – общая формула для чисел, делящихся на 3. Если из таких чисел вычесть по 1, то получим числа вида $3n - 1$:

Все числа нижней строки таблицы при делении на 3 дают остаток 2.

⁴⁰ Есть несколько разных решений. Достаточно найти одно из них. Самое неправильное – ставить ферзей без системы, наудачу. Вам поможет какая-нибудь симметрия или вообще разумная организация перебора.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$3n$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
$3n - 1$	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

$4n$ – формула для чисел, делящихся нацело на 4. Вычитая из них по 1, получим числа вида $4n - 1$, которые при делении на 4 дают в остатке 3. Поскольку $4n - 3 = 4(n - 1) + 1$, те же самые числа можно задать формулой $4n + 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$4n$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
$4n + 1$	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
$4n + 2$	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
$4n + 3$	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47

684. Напишите формулу для чисел, дающих при делении на 4 остаток а) 0; б) 1; в) 2.

Разделить с остатком целое число a на натуральное число b – значит найти такое целое число q (неполное частное) и такое неотрицательное число r (остаток), что $a = bq + r$ и $r < b$.

Например, равенство $179 = 12 \cdot 14 + 11$ означает, что 179 при делении на 12 дает неполное частное 14 и остаток 11. А равенство $5 = 7 \cdot 0 + 5$ означает, что 5 при делении на 7 дает неполное частное 0 и остаток 5.

685. Найдите остаток и неполное частное от деления числа
а) 1997 на 850; б) -200 на 23; в) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$ на 5;
г) 1111111 на 111; д) 98765432 на 12345679; е) $\underbrace{33 \dots 33}_{50 \text{ троек}}$ на $\underbrace{33 \dots 33}_{13 \text{ троек}}$.

686. При каком наименьшем n из любых n целых чисел можно выбрать 10 чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 6?

687. Сколько воскресений может быть в году?

688. Может ли быть в одном месяце пять воскресений?

689. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца?

690. В январе некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели было 20-е число этого месяца?

691. а) В некотором году воскресений было больше, чем суббот. Какой день недели был 1 января?

б) В некотором году воскресений было больше, чем суббот, а понедельников – больше, чем вторников. Какой день недели был 8 марта этого года?

692. Начнем считать пальцы на руке следующим образом: пусть 1-м будет большой, 2-м – указательный, 3-м – средний, 4-м – безымянный, 5-м – мизинец, 6-м – снова безымянный, 7-м – средний, 8-м – указательный, 9-м – большой, 10-м – указательный, и так далее. Какой палец будет 2000-м?

693. В новогоднюю ночь на подоконнике стояли в ряд (слева направо) герань, крокус и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

694. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, во втором – 18. На какое число делили?

66. Периодичность остатков

*Я повторяю путь земной
былых людских существований;
ничто не ново под луной,
кроме моих переживаний.*

И.Губерман

695. Найдите остаток от деления на 7 числа $11\dots11$, десятичная запись которого состоит из 1994 единиц.

696. а) При каких n число $\underbrace{111\dots11}_n$ делится на 7?

б) Делится ли число $\underbrace{111\dots11}_{100}$ на 13?

697. Докажите, что если число вида $11\dots11$ (записываемое одними единицами) нацело делится на 7, то оно делится нацело и на 13.

698. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

699. На какую цифру оканчивается число а) 2^{100} ;

б) $33^{77} + 77^{33}$; в) $9999^{9999^{9999}}$?

700. Найдите две последние цифры числа 2^{2000} .

701*. Существует ли число вида 191919...1919, делящееся на 97?

702*. Если целые числа a и m взаимно просты, то найдется такое натуральное n , что $a^n - 1$ делится на m . Докажите это.

Указание. Рассмотрите числа $1, a, a^2, \dots, a^m$. Поскольку остатков от деления на m всего m , какие-то два из рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на m . Разность этих чисел нацело делится на m .

67. Арифметические прогрессии

Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый следующий член которой на одну и ту же величину d больше предыдущего⁴¹. Число d называют разностью прогрессии.

Примеры арифметических прогрессий:

• 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, ...

Первый член этой арифметической прогрессии равен 2, второй – 5, третий – 8, и так далее. Разность прогрессии равна 3.

Формула n -го члена этой прогрессии: $3n - 1$. Подставив в эту формулу $n = 1$, получим первый член: $3 \cdot 1 - 1 = 2$. Подставив $n = 9$, получим девятый член: $3 \cdot 9 - 1 = 26$. Для нахождения 100-го члена надо подставить в формулу $n = 100$ и вычислить: $3 \cdot 100 - 1 = 299$.

• 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...

Здесь $d = 0$. Постоянная последовательность – тоже арифметическая прогрессия. Формула n -го члена очень проста: 3. (Если угодно, можно написать $3 + 0 \cdot n$.)

• 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7, -10, -13, ...

Разность равна -3, поэтому прогрессия убывающая. Формула n -го члена: $14 - 3n$.

• 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...

Это – последовательность положительных нечетных чисел. Разность прогрессии равна 2. Формула n -го члена: $2n - 1$.

703. В арифметической прогрессии 6-й член равен 26, а 7-й член равен 30. Найдите разность и первый член.

704. В арифметической прогрессии 8-й член равен -9, а 10-й равен -3. Найдите разность и первый член.

⁴¹ При $d < 0$ естественнее сказать, что каждый следующий член на одну и ту же величину меньше предыдущего.

705. В арифметической прогрессии 5-й член равен 9, а 105-й равен 309. Найдите разность прогрессии.

706. Найдите 5-й и 18-й члены прогрессии, n -й член которой задан формулой $2n + 5$.

707. Найдите формулу n -го члена арифметической прогрессии, первый член которой равен 23, а разность равна 5.

Предупреждение. Ответ $23 + 5n$ ошибочен.

708. Найдите все положительные члены арифметической прогрессии с первым членом 23 и разностью -5 .

708'. Найдите все отрицательные члены арифметической прогрессии с первым членом -23 и разностью 5.

709. Найдите все положительные члены арифметической прогрессии, n -й член которой задан формулой $58 - 10n$.

709'. Найдите все отрицательные члены арифметической прогрессии, n -й член которой задан формулой $20n - 78$.

710. Найдите первый член арифметической прогрессии, 12-й член которой равен 43, а разность равна 4.

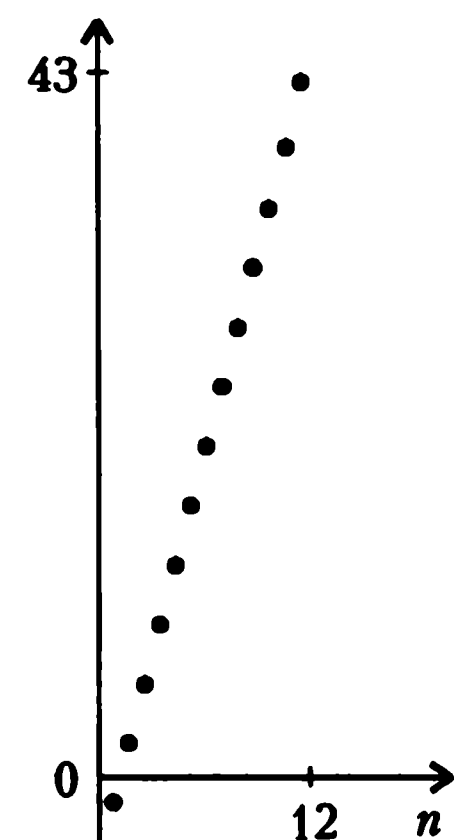
Указание. Посмотрите на рисунок 138.

711. Найдите разность прогрессии, 10-й член которой равен 1998, а 15-й равен 98.

712. Что больше: 6-й член прогрессии с первым членом 1 и разностью 0,2 или 8-й член прогрессии, второй член которой 10, а разность равна -1 ?

713. Сколько среди членов арифметической прогрессии 2, 7, 12, 17, ... трехзначных чисел?

Рис. 138



714. Какие числа входят и в прогрессию с первым членом 19 и разностью -2 , и в прогрессию с третьим членом 3 и разностью 4?

715. Найдите арифметическую прогрессию, если сумма ее третьего и шестого членов равна 2, а сумма четвертого и девятого членов равна -14 .

716. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 12. Второй ее член меньше пятого в 2 раза. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

717. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на 50 меньше суммы ее следующих пяти членов. На сколько десятый член прогрессии больше ее второго члена?

718. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма четвертого,

пятого, седьмого и шестнадцатого членов этой прогрессии равна 32.

719. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

68. Примеры и конструкции

Иди туда – не знаю куда, принеси то – не знаю что.

720. Переставьте числа (рис. 139), чтобы суммы во всех указанных направлениях (по горизонталям, вертикалям и двум диагоналям) стали одинаковы.

721. а) Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таблицу 3×3, чтобы суммы чисел всех указанных в предыдущей задаче направлений совпадали.

б) То же – для чисел -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

Указание. Посчитайте сумму всех данных чисел. Разделив ее на 3, получите «сумму по направлению».

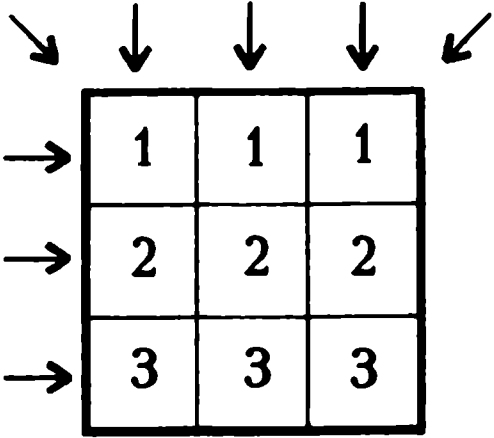


Рис. 139

722. Расставьте в клетках таблицы размером 3×3 числа от 1 до 9 таким образом, чтобы суммы чисел по трем вертикалям, трем горизонталям и обеим диагоналям были различны.

Закрасьте клетки квадрата 4×4 в 4 цвета так, чтобы одинаковые цвета не повторялись ни в строчках, ни в столбцах, ни по обеим диагоналям.

Подсказка. Можно закрасить сначала 4 центральных квадрата; затем выкрасить диагонали большого квадрата, соблюдая условия задачи; потом закрасить остальные квадраты.

724. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую – опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

725. Придумайте число, которое оканчивается цифрами 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

726. Существуют ли два последовательных натуральных числа⁴², сумма цифр каждого из которых делится на а) 11; б) 13; в) 1018?

⁴² Имеются в виду два числа, отличающиеся на 1, например числа 5 и 6, 1297 и 1298.

г*) Если натуральное число n не делится на 3, то найдутся два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на n . Докажите это.

Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда.

А.Чехов

727. Номера автобусных билетов состоят из 6 цифр, начиная с билета 000000 и кончая билетом 999999. Билет считается счастливым, если сумма первых трех его цифр равна сумме трех последних. Достаточно ли купить 1000 билетов подряд, чтобы среди них наверняка нашелся хотя бы один счастливый?

728. Разместите числа от 1 до 9 в квадрате 3×3 так, чтобы суммы чисел по вертикалям, горизонталям и диагоналям были различны.

729. Придумайте 100-значное число без нулевых цифр, делящееся на сумму своих цифр.

730. Можно ли перенумеровать ребра куба числами от 1 до 12 (каждое ребро – своим числом), чтобы сумма номеров любых трех ребер, сходящихся в одной вершине, делилась на 3?

730'. Можно ли покрасить ребра куба тремя красками, чтобы в каждой вершине сходились ребра всех трех цветов?

731. Придумайте а) четыре; б) тысячу натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

732*. Из 40 спичек образована квадратная решетка (рис.140). Покажите, как снять 9 спичек, чтобы контур ни одного квадрата (состоящего из одного или нескольких маленьких квадратиков) не сохранился полностью. Достаточно указать один способ, как это сделать.

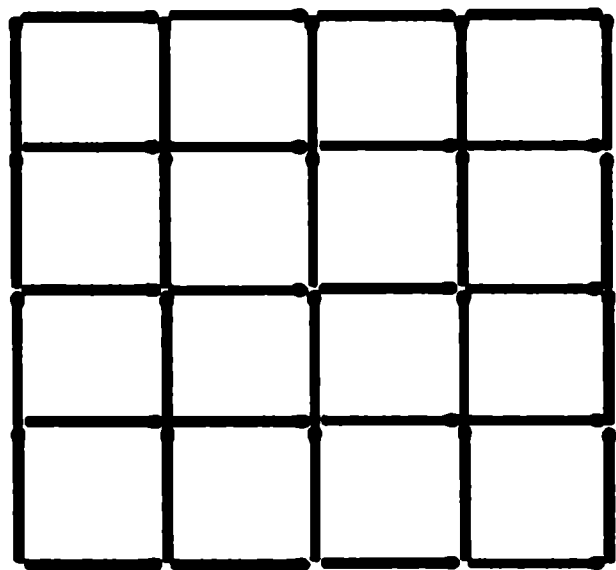


Рис. 140

733. Семиклассник разрезал квадрат на прямоугольники периметра 7 см, а восьмиклассник – точно такой же квадрат на прямоугольники периметра 8 см. Могло ли у восьмиклассника получиться больше прямоугольников?

734. Вначале во всех клетках таблицы 3×3 стоят нули. Можно выбрать квадрат 2×2 и увеличить на 1 все четыре его числа. Удастся ли за несколь-

ко таких операций получить изображенную на рисунке 141 таблицу?

735. Расположите на плоскости 11 одинаковых квадратов, чтобы они не налегали друг на друга и выполнялось условие: как бы ни раскрасить квадраты в три цвета – обязательно найдутся два квадрата одного цвета, имеющие общий отрезок границы, т.е. прилегающие друг к другу частью стороны (не точкой!).

4	9	5
10	18	12
6	13	7

Рис. 141

736. На плоскости лежат одинаковые круги, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Всегда ли можно раскрасить круги в три цвета, чтобы любые два касающихся круга были разного цвета?

737*. Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги так разбить на доминошки 1×2 , чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

738. Можно ли повесить веревочку на два гвоздя так, чтобы при вынимании любого гвоздя она падала?

739*. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляют пешки по следующим правилам: выбирают любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставят пешку. Затем аналогично выбирают еще четыре пустые клетки, на одну из них ставят вторую пешку, и так далее. Какое наибольшее число пешек можно таким образом поставить на доску?

740. Даны две одинаковые шестеренки с 13 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так, что проекция на плоскость выглядит как одна шестеренка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестеренки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестеренка (проще говоря, чтобы никакие две дырки не совпали)?

741*. Через несколько лет после распада империи, состоявшей из 16 княжеств, оказалось, что каждое княжество дружит с тремя другими княжествами и враждует со всеми остальными. Можно ли разбить эти княжества на 8 пар дружественных княжеств?

69. Сложим первое с последним, второе с предпоследним ...

Идея, примененная однажды, порождает искусственный прием; примененная дважды, она становится методом.

Д.Пойа, Г.Сегё

Когда маленький Гаусс посещал начальную школу⁴³, учитель, надеясь отдохнуть, велел ученикам сложить числа 1, 2, ..., 20 (иногда говорят, что надо было просуммировать числа не от 1 до 20, а от 1 до 100).

Когда другие еще только собирались приступить к работе, Гаусс уже отложил грифельную доску. На ней было единственное число – ответ!

Как же Гаусс смог быстро найти сумму первых 20 натуральных чисел? Наверное, он заметил закономерность

$$1 + 20 = 2 + 19 = 3 + 18 = \dots = 8 + 13 = 9 + 12 = 10 + 11 = 21$$

и умножил 21 на 10.

742. Геологи нашли 19 камней массами 1 кг, 2 кг, ..., 19 кг. Смогли ли они разложить эти камни по 10 рюкзакам, чтобы во всех рюкзаках был одинаковый груз?

743. Вычислите:

а) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$;

б)
$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8}{8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15}$$
;

в) $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$;

г) $(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1992 + 1993) : 1993$.

744. В обычном наборе домино 28 доминошек. Сколько костей содержал бы комплект домино, у которого значения, указанные на косточках, изменялись бы не от 0 до 6, а от 0 до 11?

Решение. Достаточно (рис.142) подсчитать сумму первых двенадцати натуральных чисел:

$$12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 78.$$

Есть и другой способ. В домино будет 12 дуплей. На одной половине кости, не являющейся дуплем, может стоять любое из 12 возможных чисел, а на другой – любое из 11 оставшихся чисел; итого $12 \cdot 11 = 132$ варианта. Каждый недупль мы таким образом

⁴³ Хорошая история необязательно должна быть истинной, достаточно правдоподобия. Нужно ли слишком строго следовать за фактами?

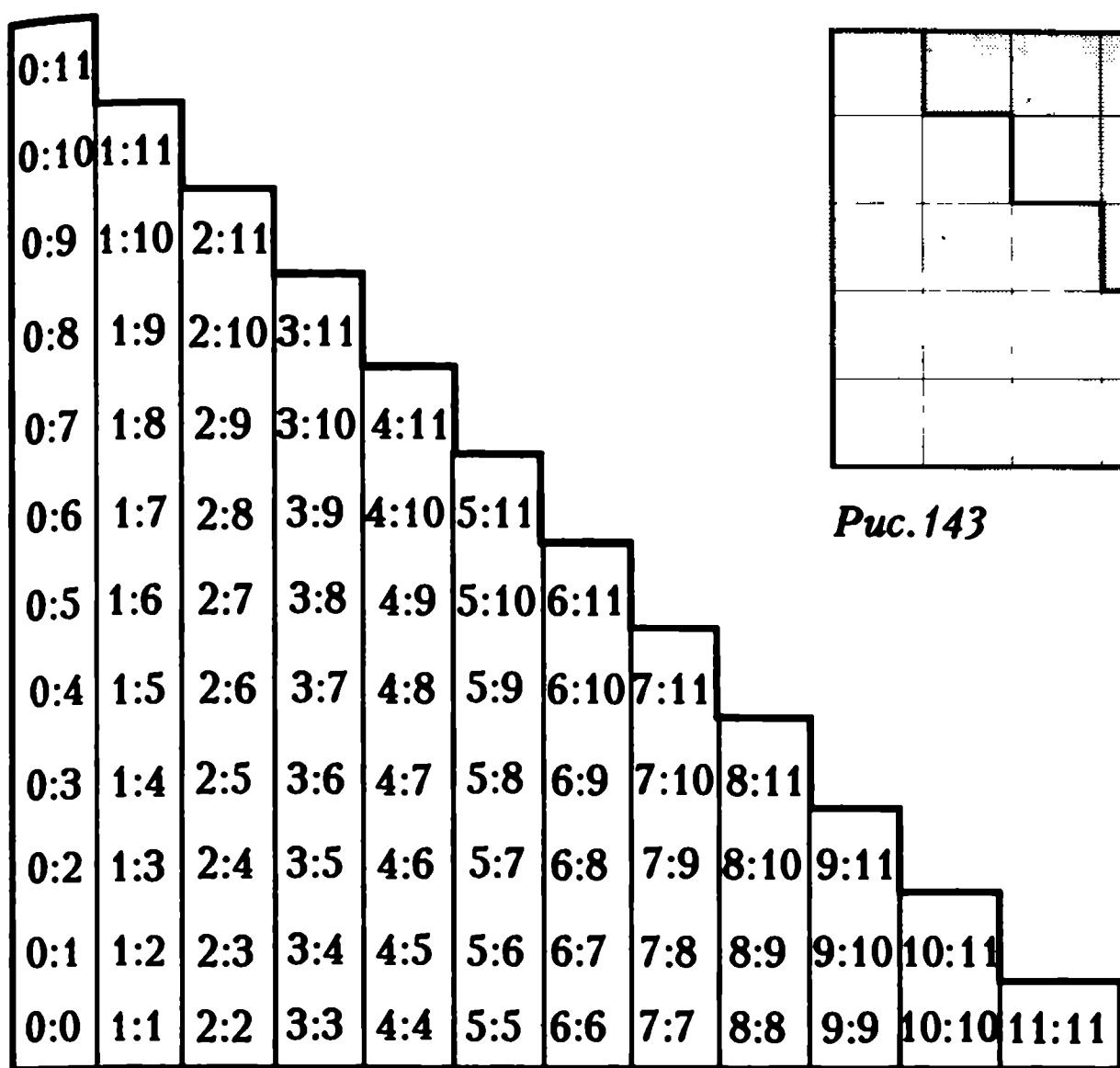


Рис. 142

посчитали дважды, поэтому их вдвое меньше, т.е. $132 : 2 = 66$. Вместе с 12 дуплями получаем ответ: $66 + 12 = 78$.

745. Летят журавли. Впереди один журавль, за ним два, потом три и так далее. Сколько всего журавлей, если в последнем ряду их 15?

746. Вычислите сумму

$$1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Решение. Первый способ. Сумма $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ — это число закрашенных клеток в прямоугольнике $n \times (n + 1)$, совпадающее с числом незакрашенных (случай $n = 5$ проиллюстрирован на рисунке 143).

Второй способ. В квадрате $n \times n$ на диагонали n клеток, ниже диагонали — $1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1)$, выше — столько же (случай $n = 12$ — на рисунке 144). Поэтому

$$S = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Третий способ. Запишем слагаемые один раз в возрастающем, а другой

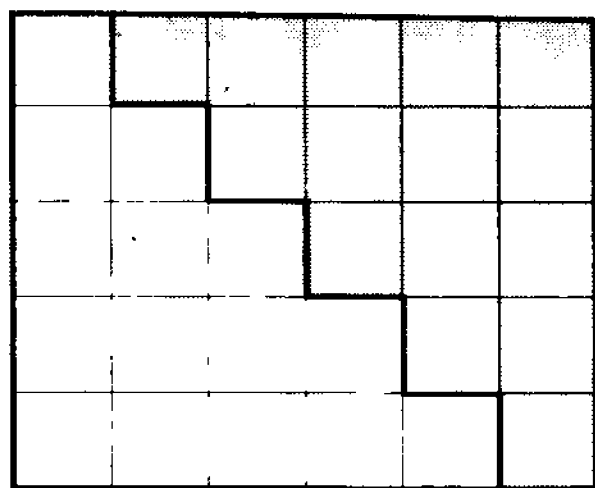


Рис. 143

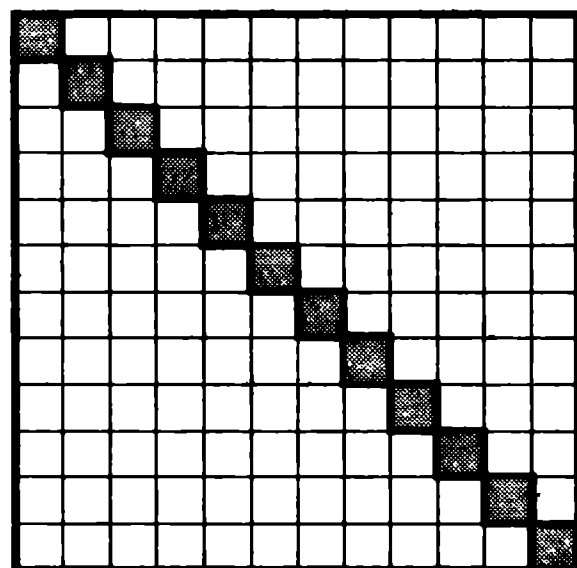


Рис. 144

раз – в убывающем порядке:

$$S = 1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n,$$

$$S = n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Сложим полученные выражения:

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1) + (n + 1).$$

Значит,

$$2S = n(n + 1), \text{ т.е. } S = n(n + 1)/2.$$

Замечание. Числа вида $(n^2 + n)/2$ называют треугольными (рис.145).

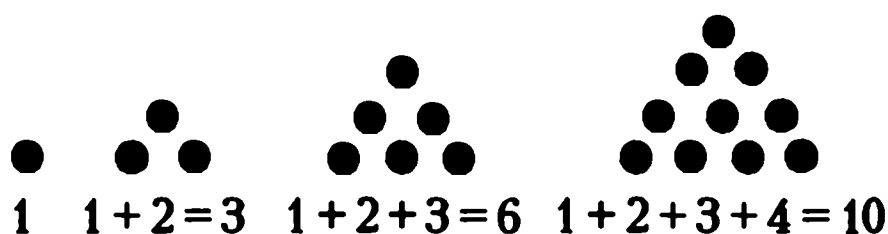


Рис.145

Подобно Гауссу, великий математик XX века А.Н.Колмогоров вспоминал, что радость математического открытия он познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность

$$1 = 1^2,$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2.$$

Эта закономерность коротко записывается тождеством

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Проще всего доказать его геометрически, нарисовав квадрат $n \times n$ и разрезав его на уголки из 1, 3, ..., $(2n - 1)$ клеток (рис.146).

747. Можно ли подобрать знаки в выражении

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 7 \pm 8 \pm 9 \pm 10 \pm 11 \pm 12 \pm 13 \pm 14 \pm 15 \pm \\ \pm 16 \pm 17 \pm 18 \pm 19 \pm 20,$$

чтобы его значение стало равно 20?

Указание. Сначала везде поставьте знак $\leftarrow + \rightarrow$. Получите сумму $1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20 = 210$. Затем сообразите, что поставить знак $\leftarrow - \rightarrow$ перед каким-либо числом a – то же самое, что вычесть удвоенное число a . Следовательно, достаточно решить уравнение $210 - 2x = 20$ и затем из имеющихся чисел 2, 3, ..., 19, 20 составить число x .

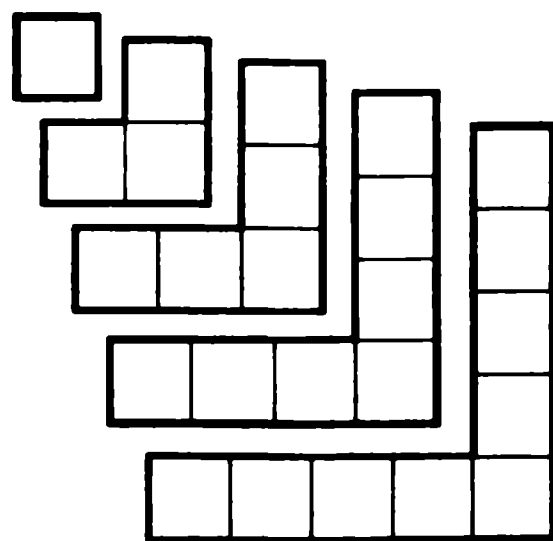


Рис. 146

748. Найдите сумму первых 25 членов арифметической прогрессии, 13-й член которой равен 15.

749. Сколько надо взять слагаемых суммы $1 + 2 + 3 + \dots$, чтобы в результате сложения получить трехзначное число, в записи которого все цифры одинаковы?

750. Четвертый член арифметической прогрессии равен -1 , а девятый равен 14. Сколько членов этой прогрессии (начиная с самого первого) надо взять, чтобы их сумма равнялась 35?

751. Имеются гири, массы которых (в граммах) – последовательные натуральные числа от 1 до 201 (всего – 201 гиря). Назовем гирю хорошей, если после ее удаления оставшиеся 200 гирь можно разделить на две группы, равные по массе и по количеству гирь. Докажите, что гиря массой а) 101 г; б) 199 г хорошая.

752. Разложите на три равные по массе кучи

а) 552 гири массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 552 г;

б) 555 гирь массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 555 г.

в) При каких n гири массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., n г можно разложить на три равные по массе кучки?

70. В жаркий летний день...

Опыт есть то, до чего мы доходим опытным путем, на опыте убедившись, что не надо было набираться этого опыта.

И.Эккерман

753. Балда договорился с попом отработать на него ровно год и расплатиться щелчками по лбу. Он предложил, чтобы за каждый отработанный день добавлялся один щелчок, а за каждый прогул вычиталось 10 щелчков. Поп же настаивал на более хитром, по его мнению, варианте: за отработанный день начисляется 12 щелчков, а за пропущен-

ный вычитается аж 121 щелчок. По окончании срока выяснилось, что в обоих случаях поп должен получить от Балды одно и то же число щелчков. Сколько же именно?

754. Два рыбака поймали 70 рыб, причем $5/9$ улова первого составляли караси, а $7/17$ улова второго – окуни. Сколько рыб поймал каждый из них?

755. Когда пассажиры вошли в пустой трамвай, половина их заняла места для сидения. Сколько их было, если после первой остановки число пассажиров увеличилось ровно на 8% и известно, что трамвай вмещает не больше 70 человек?

756. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо однудохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста – король и герцог – были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

757. В жаркий летний день представители нескольких фирм собрались на переговоры. Вначале за каждым столом сидели по два человека – и официант поставил на каждый стол по бутылке минеральной воды. Потом представители разбились на группы по трое. Официант принес для каждого столика по бутылке лимонада. В заключение за каждым столом собралось по четыре человека – и официант поставил еще по бутылке. Кроме того, каждый фирмач выпил по бутылочке пепси-колы. Всего было выпито 50 бутылок. Все поданные напитки были выпиты. Сколько человек участвовало в переговорах?

758. В три магазина привезли всего 1990 книг. В первые три дня один магазин продал соответственно $1/37$, $1/11$ и $1/2$ части полученных им книг, второй магазин – $1/57$, $1/9$ и $1/3$ полученных вторым магазином книг, а третий магазин – $1/25$, $1/30$ и $1/10$ полученных им книг. Сколько книг получил каждый магазин?

759. В карьере заготовлено 200 гранитных плит, 120 из которых весят по 7 тонн каждая, а остальные – по 9 тонн. На железнодорожную платформу можно грузить до 40 тонн. Сколько платформ нужно для вывоза плит из карьера?

760. а) Магазину надо было получить со склада 185 кг конфет. На складе имеются ящики с конфетами по 16 кг, 17 кг и 21 кг. Каких ящиков и сколько мог получить магазин?

6) 100 буйволов съели 100 охапок сена. Стоявшие буйволы съели по 5 охапок, лежавшие – по 3 охапки, а спавшие – по одной трети охапки. Сколько буйволов стояло, а сколько лежало?

760'. Решите в целых неотрицательных числах а) уравнение

$$16x + 17y + 21z = 185;$$

б) систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100. \end{cases}$$

761. Пастух пас стадо из 100 голов. За это ему заплатили 200 рублей. За каждого быка заплатили 20 рублей, за корову – 10, а за теленка – 1 рубль. Сколько в стаде быков? Сколько коров? А телят?

762. (Старинная задача.) Двенадцать человек – мужчин, женщин и детей – несут двенадцать хлебов. Каждый мужчина несет по два хлеба, каждая женщина – по полхлеба, каждый ребенок – по четверти хлеба. Сколько мужчин, сколько женщин и сколько детей?

Указание. Можно перебирать возможности по количеству мужчин, можно – по количеству женщин, можно – по количеству детей. Какой способ быстрее приведет к цели – тем и действуйте!

762'. Решите в неотрицательных целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 12, \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 12. \end{cases}$$

763. В стране фараонов одинаковыми монетами любого достоинства можно набрать сумму ровно в один динар, причем для этого всегда нужно менее 100 монет. Барон Мюнхгаузен привез оттуда 7 монет разных достоинств и утверждает, что они составляют сумму в один динар. Могут ли слова барона оказаться правдой?

764. Найдите хотя бы две пары натуральных чисел x и y , для которых верно равенство $2x^3 = y^4$.

765. Приведите пример таких отличных друг от друга натуральных чисел x , y и z , что $x^3 + y^3 = z^4$.

766. Трем мудрецам показали 5 колпаков: 3 черных и 2 белых. Затем им завязали глаза и надели всем троим по черному колпаку. После этого с них сняли повязки и предложили каждому определить, какого цвета колпак на нем. Через некоторое время один из

мудрецов догадался, что на нем черный колпак. Объясните, какие рассуждения позволили ему сделать такой вывод.

767. Верно ли, что число $n^2 + n + 41$ простое при любом натуральном n ?

71. Индукция

... выпросился остаться одну ночку; от одной ночки две ночки, от двух ночек две недели, от двух месяцев два года, а от двух годов жил тридцать лет.

768. Любое целое число рублей, большее семи, можно уплатить только трешками и пятерками. Докажите это.

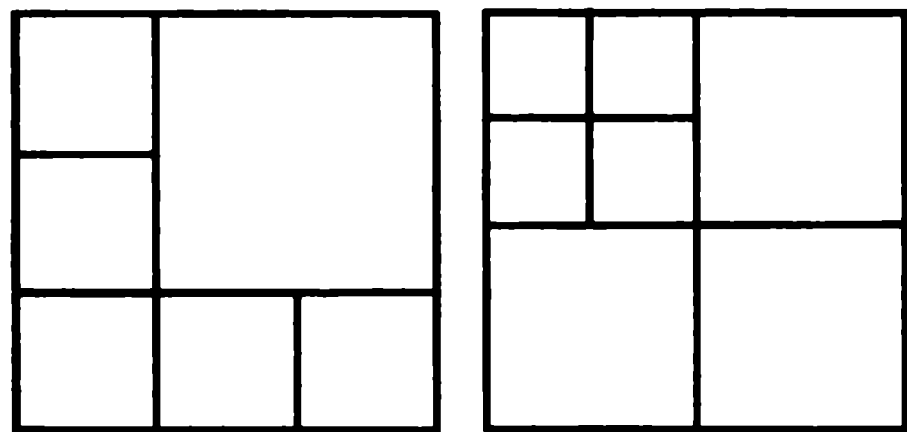
769. Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Указание. Сначала придумайте три числа, сумма которых делится на каждое из них. Потом подумайте, нельзя ли получить четыре таких числа,...

770. Делится ли число 11...11 (восемьдесят одна единица) на 81?

Подсказка. 111 делится на 3, 111 111 111 = 111 · 1001001 – на 9. Можно показать, что составленное из 3^n единиц число делится на 3^n . Впрочем, есть и другое рассуждение: при делении числа 111 111 111 на 9 получится некоторое частное (не имеет значения, какое именно). Чтобы разделить число 11...11 на 9, достаточно 9 раз подряд написать это частное (не забыв нужные нули). Осталось вспомнить признак делимости на 9.

771. а) Очевидно, квадрат нельзя разрезать на 2 или 3 квадрата, но можно – на 6 или 7 квадратов (рис.147).



Укажите все значения n , для которых квадрат нельзя разрезать на n меньших квадратов. б) При каких n правильный треугольник нельзя разрезать на n меньших правильных треугольников?

772. В поселке 100

домов. Сколько заборов, не пересекающих друг друга, можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали бы одну и ту же

Рис.147

совокупность домов? (Например, на рисунке 148 всего 4 дома и 7 заборов.)

Указание. Решите задачу сначала не для 100, а для меньшего числа домов – для 1, 2, 3,...

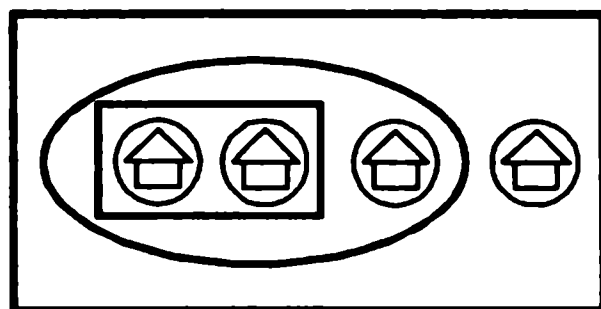


Рис. 148

773. а) Плоскость разбита несколькими окружностями на части. Докажите, что каждую часть можно выкрасить одной из двух красок так, что любые две граничащие по дуге части будут разного цвета.

б) Докажите то же самое, если плоскость разбита на части окружностями и прямыми.

в) На плоскости расположены несколько «треножников» (треножник состоит из трех лучей с общей вершиной). Докажите, что если никакие два из ограничивающих треножники лучей не параллельны, то части, на которые они разбивают плоскость, можно выкрасить тремя красками так, чтобы части, граничащие по отрезку или лучу, оказались бы выкрашены в разный цвет.

774. В таблице из трех строк и 1992 столбцов произвольным образом расставлены фишки: 1992 белых, 1992 красных и 1992 синих. Докажите, что можно так переставить фишки в каждой строке, чтобы в каждом столбце оказались фишки всех трех цветов.

775. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость n прямых?

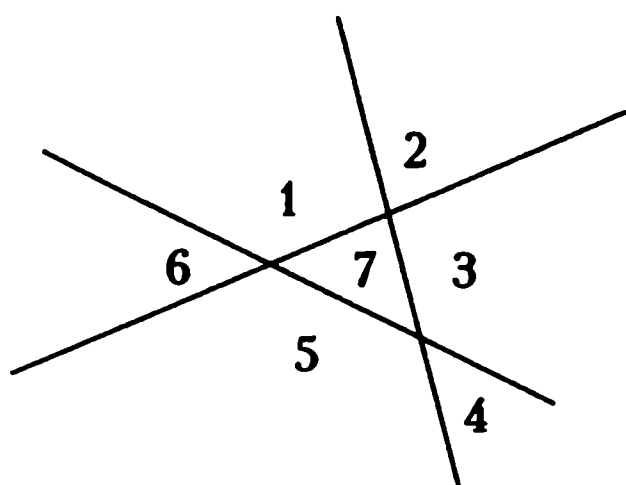


Рис. 149

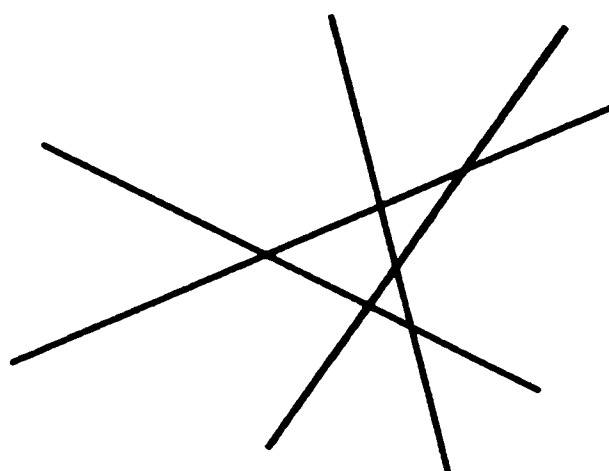


Рис. 150

Указание. Три прямые делят плоскость, самое большее, на 7 частей (рис. 149). Четвертая прямая (рис. 150) разрезает не все, а только 4 части и разбивает плоскость на 11 частей.

72. Обходы

Пошли своим путем и вновь заблудились.

Т.Клейман

776. На рисунке 151 изображен маршрут короля, обошедшего доску 2×2 , чередуя диагональные и недиагональные ходы и побывав на каждой клетке ровно по одному разу. Нарисуйте такой маршрут для доски 8×8 .

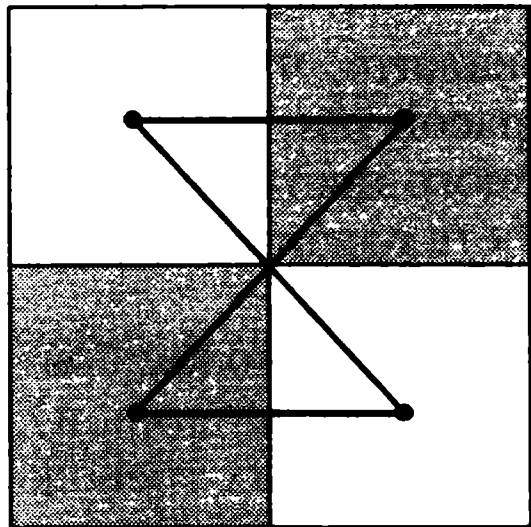


Рис. 151

777. Обойдите конем доску а) 4×5 ; б) 4×6 ; в) 4×7 .

Докажите, что при $n > 4$ доску размером $4 \times n$ обойти конем, побывав на каждом поле по одному разу, г) можно; д*) нельзя, если необходимо последним ходом возвратиться на исходную клетку.

778. Обойдите доску а) 13×13 ; б) 5×5 ; в) 10×10 конем, побывав на каждом поле ровно по одному разу.

73. Деревья

Дурак видит не то самое дерево, что видит умный.

В.Блейк

779. В доску вбито 20 гвоздиков (рис. 152). Расстояние между соседними равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от А до В так, чтобы она прошла через все гвоздики.

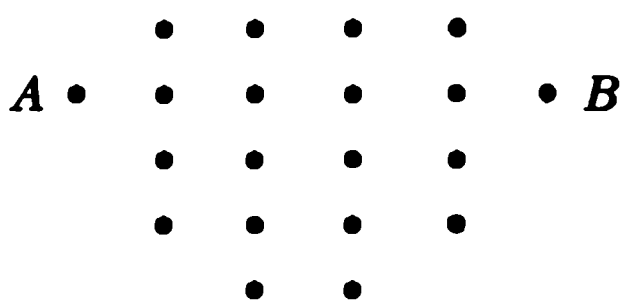


Рис. 152

780. Сколько было бревен, если пятьюдесятью двумя распилами из них получили 72 полена?

781. Вова пошел с папой в тир. Уговор был такой: Вова делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право сделать еще 2 выстрела. Вова выстрелил 17 раз. Сколько раз он попал в цель?

Пояснение. Ответ можно угадать, взглянув на рисунок 153. Но нужно доказать, что ответ будет именно таким в любом случае.

782. а) Имеется лист бумаги. Его можно разорвать на 5 частей. Каждый новый кусок можно разорвать на 5 частей или

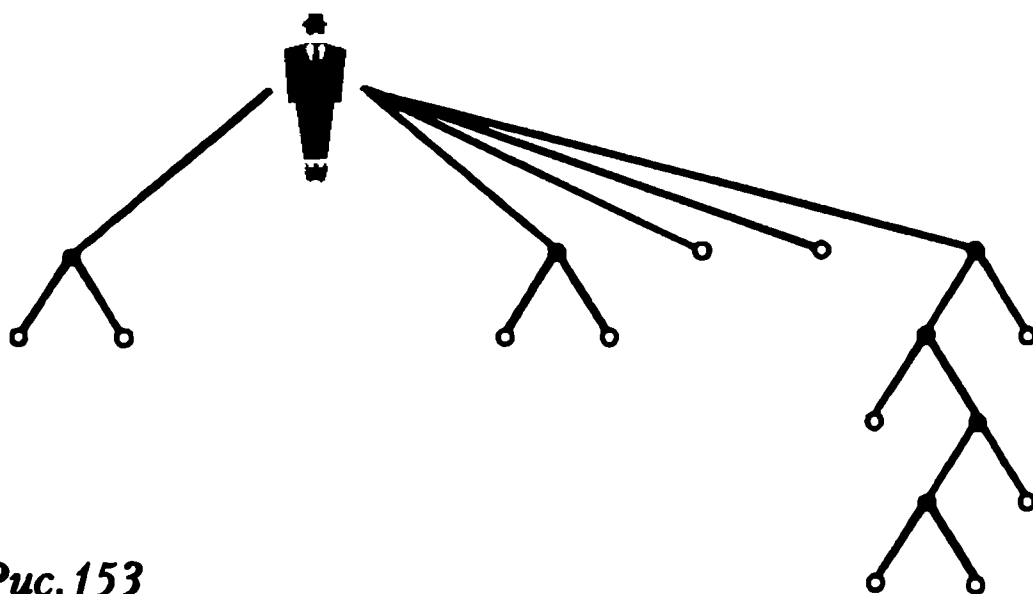


Рис.153

оставить целым, и так далее. Можно ли получить таким образом 50 кусков?

б) Если всякий раз можно рвать на 8 или на 12 частей, выясните, можно ли из одного листа получить 60 кусков; докажете, что любое число кусков, большее 60, получить можно.

783. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Сколько спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички? (На рисунке 154 убраны 63 спички. Нельзя ли обойтись меньшим числом?)

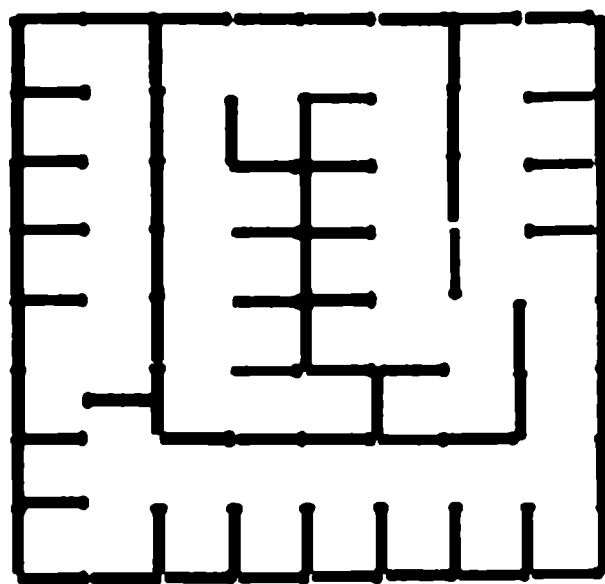


Рис.154

784. На рисунке 155,а изображена сетка размером 4×6 , а на рисунке 155,б показано, как можно разрезать 24 веревочки так, чтобы она не распалась. Какое наибольшее число веревочек, соединяющих соседние узлы сетки размером а) 4×6 ; б) $m \times n$, можно разрезать, чтобы сетка не распалась на отдельные куски?

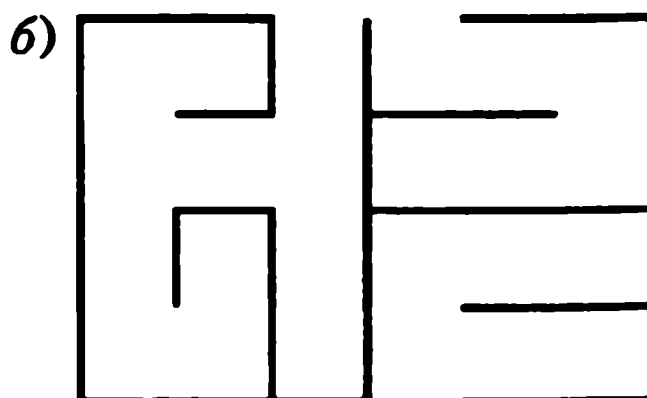
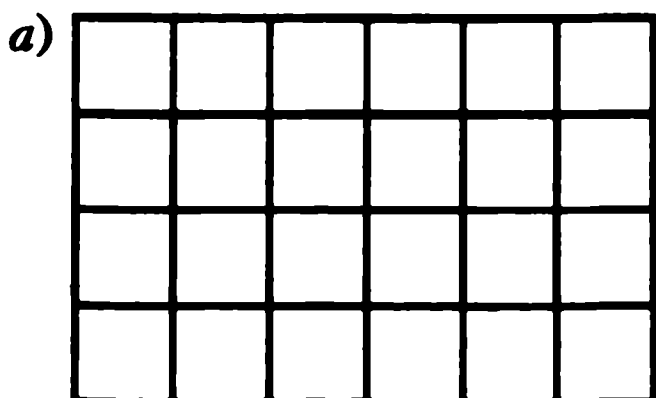


Рис.155

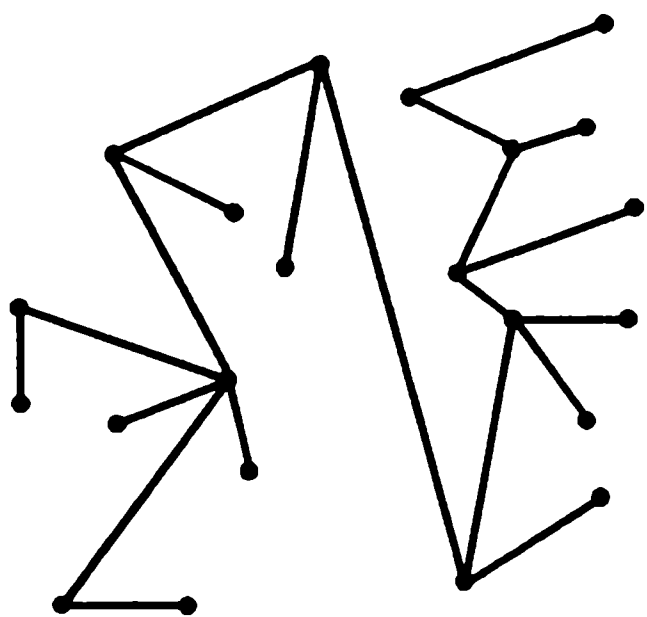


Рис. 156

785. Несколько точек соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой можно пройти в каждую из остальных по отрезкам, причем единственным путем (рис. 156). Докажите, что отрезков на 1 меньше, чем точек.

786. В землю вбили 19 кольшков. Двое по очереди связывают пары кольшков бечевой: каждым ходом — одну пару. Выигравшим считается игрок, при ходе которого

образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечевки (вершинами ломаной должны быть кольшки). Не разрешается связывать два уже ранее соединенных кольшка. Кто выиграет при правильной игре?

787. Карлсон предложил Малышу следующую игру. На столе лежат две кучки: в одной 7 спичек, а в другой 8. Начинающий делит кучку на две кучки, затем второй делит одну из кучек на две, и т. д. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Карлсон начинает. а) Кто выиграет? б) Зависит ли результат от того, кто как играет, или важно лишь, кто ходит первым?

788. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

789. В пруд пустили 30 щук, которые кушали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трех щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться? (Съеденная сытая щука учитывается при подсчете сытых щук!)

790. Все началось с одной курицы, которая снесла два яйца. Из них вывелись цыплята: петух и курица. Когда они подросли, петуха съели, а курицу съели только после того, как она снесла два яйца. Так делали и дальше: из яиц выводили цыплят, и так далее. Все прекратилось, когда из яиц вылупились одни только петухи, которые из-за отсутствия кур не дали потомства и были съедены. Всего было съедено 1994 петуха. Сколько было кур?

791*. В ряд выложены 100 монет: орел, решка, орел, решка, ... За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое минимальное количество ходов можно добиться, чтобы все монеты оказались орлом вверх?

74. О пользе схем

Гамак — это много-много узелков, соединенных веревочками.

К. Чуковский

При решении многих задач полезно рисовать картинки, схемы. Например, следующую задачу трудно решить устно или подбором — нет сил думать о 9 цифрах сразу. Но как только нарисуете схему — ответ станет очевиден.

792. Можно ли расставить числа $1, 2, \dots, 9$ по кругу, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

793. Можно ли записать цифры от 0 до 9 в строку так, чтобы число, составленное из любых двух подряд идущих цифр, делилось на 7 или 13?

794. В школьном драмкружке решили ставить «Ревизора», и тут разгорелся спор.

— Ляпкиным-Тяпкиным буду я, — заявил Гена.

— Нет, я! Я всю жизнь мечтал воплотить этот образ, — возразил Дима.

— Хорошо, я уступлю, если мне дадут роль Хлестакова, — проявил великодушие Гена.

— А мне Осипа, — не уступил в великодушии Дима.

— Хочу быть Земляникой или Городничим, — сказал Володя.

— Нет, Городничим буду я, — хором закричали Алик и Боря, — или Хлестаковым, — добавили они одновременно.

Удастся ли ребятам распределить роли так, чтобы все были довольны?

795. Расставьте числа $1, 2, 3, \dots, 8$ в кружочках рисунка 157, чтобы ни в каких двух соединенных отрезком кружочках не оказались бы соседние⁴⁴ натуральные числа.

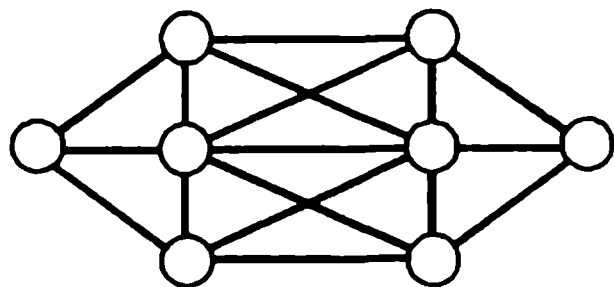


Рис. 157

796. В очереди стоят Юра, Миша, Вова, Саша и Олег. Юра стоит раньше Миши, но после Олега. Вова и Олег не стоят рядом. Саша не стоит рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Вовой. В каком порядке стоят ребята? (Не только придумайте ответ, но и объясните, почему другие случаи невозможны.)

⁴⁴ Т.е. отличающиеся на 1.

797. Замените буквы в слове **ТРАНСПОРТИРОВКА** цифрами (разные буквы – разными цифрами, одинаковые – одинаковыми) так, чтобы выполнялись неравенства

$T > P > A > H < C < П < O < P < T > И > P > O <$

$< B < K < A.$

798. В верхних углах доски 3×3 стоят черные кони, в нижних – белые (рис.158).

а) Поменяйте их местами (т.е. добейтесь, чтобы в верхних углах оказались белые кони, а в нижних – черные).

б) Сколько ходов для этого необходимо?

в) Можно ли, следуя шахматным правилам, добиться, чтобы по одной диагонали оказались белые кони, а по другой – черные?

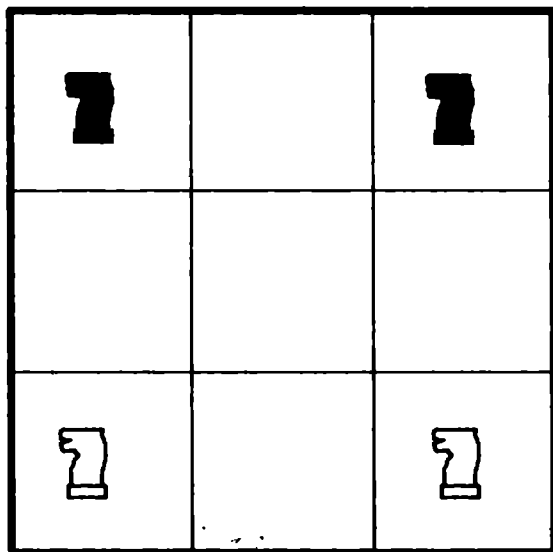


Рис.158

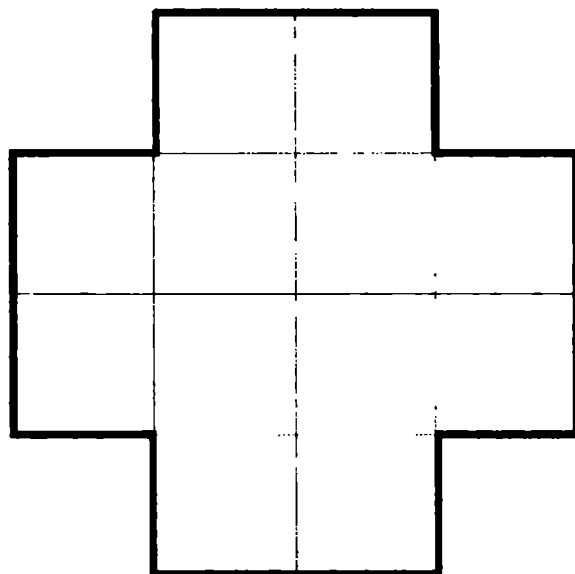


Рис.159

799. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки (рис.159). Можно ли ее обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и вернувшись на исходное поле?

800. Может ли конь обойти доску а) 3×4 ; б*) 4×4 , побывав на каждой клетке один раз? (Возвращаться последним ходом на исходную клетку не обязательно.)

75. В спортклубе тренируются 100 толстяков

801. Сколько можно взять разных натуральных чисел, не превосходящих 10, чтобы среди них не нашлось двух, одно из которых точно вдвое больше другого?

802. В спортклубе тренируются 100 толстяков массой от 1 до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит точно вдвое больше другого?

Указание. Наличие толстяков одинаковой массы только упрощает дело, ибо их можно распределять в одну команду.

802'. Разбейте натуральный ряд на две части, ни в одной из которых нет двух чисел, одно из которых точно вдвое больше другого.

803. В шеренгу выстроены 1000 военных. На каждом из них фуражка или бескозырка. При этом если на ком-то фуражка, то любой военный, стоящий через девять человек от него, обязательно в бескозырке. (Например, если 28-й военный в фуражке, то и 18-й, и 38-й – в бескозырках.) Докажите, что в фуражках не более 500 военных.

804. Из первых 100 натуральных чисел выбирают 55 чисел. Докажите, что в любом случае среди выбранных чисел найдутся два таких, разность между которыми равна а) 9; б) 10; в) 12; г) 13.

д) Укажите такие 55 чисел первой сотни, среди которых нет двух чисел, отличающихся ровно на 11.

805. Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Какие именно числа выбраны?

806. Из $n + 1$ натуральных чисел, меньших $2n$, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите это.

76. Быстрое возведение в квадрат

807. Найдите закономерность, облегчающую возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5:

n	n^2	a	$f(a)$
5	25	0	0
15	225	1	2
25	625	2	6
35	1225	3	12
45	2025	4	20
55	3025	5	30
65	4225	6	42
...
105	11025	10	110
115	13225	11	132
125	15625	12	156
135	18225	13	182
...
195	38025	19	380
205	42025	20	420

Решение. Бросается в глаза то, что все квадраты рассматриваемых чисел оканчиваются цифрами 25.

Если вычеркнуть эти две последние цифры числа n^2 , а в числе n – последнюю цифру 5, то получим новую таблицу.

Осталось понять, как по числу a можно получить число $f(a)$. Для этого мы напишем формулу, которая сопоставит, например, числу 7 число $f(7) = 56$, числу 10 – число $f(10) = 110$, и так далее.

Формула очень простая: $f(a) = a(a + 1)$. Она означает, что для возведения в квадрат числа $n = 10a + 5$, получающегося приписыванием к числу a справа цифры 5, достаточно к произведению $a(a + 1)$ справа приписать две цифры 25.

Например, для возведения в квадрат числа 195 достаточно посчитать $19 \cdot 20 = 380$ и приписать цифры 25. Получаем ответ: $195^2 = 38025$.

Чтобы доказать формулу, достаточно раскрыть скобки:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a(a + 1) + 25.$$

Умножение на 100 соответствует сдвигу на два разряда, а прибавление 25 как раз дает цифры 25, которыми оканчиваются все рассматриваемые квадраты.

77. Умножение «столбиком»

Делая что-нибудь бесполезное, ограничивайтесь лишь самым необходимым.

С.Шамфор

Казалось бы, что сложного в умножении «столбиком»? А на самом деле, это – один из первых (один из самых нужных!) алгоритмов, с которым мы встречаемся в математике.

808. Извлеките квадратный корень из числа 12345678987654321. (Квадратный корень из неотрицательного числа a – это такое неотрицательное число x , которое в квадрате равно a . Например, $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{144} = 12$, поскольку $9 = 3^2$ и $144 = 12^2$.)

Указание. Сначала найдите $\sqrt{1} = 1$ (не смейтесь, произведение $1 \cdot 1$ действительно равно 1), затем $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{12321}$, $\sqrt{1234321}$, ... и подметьте закономерность.

809. Является ли число 102030405060708090807060504030201 точным квадратом⁴⁵?

Указание. Сначала придумайте такое число x , что $x^2 = 10201$, потом извлеките $\sqrt{102030201}$, а дальше все само собой станет ясно.

⁴⁵ Т.е. произведением некоторого натурального числа на себя.

810. Представьте число

11...1122..22

(десятичная запись состоит из 100 единиц и 100 двоек) в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

Подсказка. $4 \cdot 3 = 12$, $34 \cdot 33 = 1122$. Продолжите этот ряд равенств разумным образом – и казавшаяся сложной задача будет решена!

811. Докажите, что являются точными квадратами все числа вида

а) 16, 1156, 111556, 11115556 и т.д. (в середину десятичной записи предыдущего числа вставляется 15);

б) 49, 4489, 444889, 44448889 и т.д. (в середину десятичной записи предыдущего числа вставляется 48).

812. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19. (Например, на 19 делятся числа 12 008, 120 308, 1 203 308).

78. Игры

*Все лучшее, что делается нами
весенней созидательной порой,
творится не тяжелыми трудами,
а легкой искрящейся игрой.*

И.Губерман

По внешнему виду некоторые задачи-игры покажутся вам задачами для младшекласников. Между тем для их решения необходимо уметь четко формулировать стратегию и доказывать, что она при любом поведении противника ведет к выигрышу.

Советую сначала просто поиграть в эти игры с товарищем. После этого – постарайтесь абсолютно точно изложить решение задачи.

813. Двое по очереди ставят на шахматную доску ладьи (за один ход – одну ладью), чтобы они не били друг друга. (Кто какую ладью поставил, не учитывается. Нельзя ставить ладью даже под бой своей ладьи.) Кто не может поставить ладью, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре – первый или второй?

814. Аня и Таня выписывают 8-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Аня. Может ли Таня добиться, чтобы получившееся число делилось на 9?

815. Играют двое. Первый пишет на доске ненулевую цифру. Второй приписывает справа к ней некоторую цифру. Затем первый

приписывает слева к полученному числу некоторую цифру. Первый стремится к тому, чтобы получившееся на доске трехзначное число делилось на 11, а второй хочет ему помешать. Кто выиграет при правильной игре?

816. Двое по очереди пишут цифры, всего а) шесть; б) семь цифр, со старшего разряда по порядку вплоть до младшего. Начинать с нуля нельзя. а остальные цифры – совершенно произвольные. Если число разделится нацело на 11, то победителем объявляется написавший последнюю цифру, а если нет, то победителем считается написавший предпоследнюю цифру. Кто выиграет при правильной игре?

В следующей задаче речь пойдет о кубе и двойственном к нему правильном многограннике – октаэдре.

Октаэдр можно получить, соединив центры граней куба (рис.160). Соответственно, октаэдр имеет: 6 вершин –

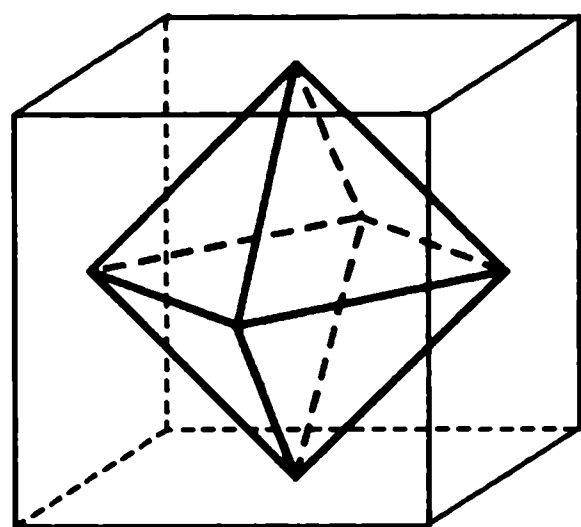


Рис. 160

столько же, сколько куб – граней; 12 ребер – столько же, сколько куб; 8 граней – столько же, сколько куб – вершин.

817*. Посылку (куб) зашили на почте в мешковину (по форме куба). Играют двое (получившие посылку). За один ход разрешается сделать разрез вдоль любого ребра куба, по которому еще не делался разрез. Проигрывает тот, при ходе которого мешковина распадется на две части. Кто выиграет при разумной игре?

817'. Из металлических прутьев сварен октаэдр. Двое по очереди перепиливают прутья. Тот, после чьего хода конструкция распадется на две части, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре? Сколько ходов при этом продлится игра?

79. Выигрышные и проигрышные позиции

Когда вагоновожатый ищет новых путей, трамвай сходит с рельсов.

Э.Кроткий

818. Алеша Попович и Добрыня Никитич воюют с девятиглавым змеем (рис.161). По очереди богатыри ходят к его пещере и отрубают 1, 2 или 3 головы. Как начавшему бой

Алеше обрести славу победителя змея (т.е. отрубить последнюю голову)? А если змей двенадцати-главый?

Указание. Если у змея 1, 2 или 3 головы, то выигрывает Алеша Попович. Если голов 4, то выигрывает Добрыня. Далее, если у змея 5, 6 или 7 голов, то выигрывает Алеша; если голов 8, то выигрышная стратегия есть у Добрыни,...



Рис. 161

819. В игре «Кто первым назовет число 100» участвуют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названному числу любое целое число от 1 до 9 и называет сумму. К этой сумме первый снова добавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму. Выигрывает тот, кто назовет число 100. Как наилучшим образом играть в эту игру?⁴⁶

820. Ладья стоит на поле $a1$. За ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле $h8$. Как надо играть?

Решение. Выигрышная стратегия есть у второго игрока: каждым ходом он может возвращать ладью на диагональ $a1-h8$. Первый игрок вынужден будет каждый раз уводить ладью с этой диагонали. Поскольку поле $h8$ принадлежит диагонали $a1-h8$, на него сумеет поставить ладью именно второй игрок.

Проанализируем это решение. Мы выделили класс проигрышных позиций – диагональ $a1-h8$. Все другие начальные позиции – выигрышные. Классы выигрышных и проигрышных позиций обладают следующими свойствами:

- *Всякий ход из проигрышной позиции ведет в выигрышную (только выиграет, увы, противник!).*
- *В любой выигрышной позиции есть ход, который переводит ее в проигрышную позицию.*

821. Двое по очереди берут из кучи камней 1, 2 или 4 камня. Выигравшим считается взявший последние камни. При каком числе камней в куче начинающий может победить, как бы ни играл его партнер?

⁴⁶ Эта игра содержится уже в собрании задач по «занимательной» математике, составленном Баше в 1612 году.

822. Двое играют на шахматной доске, передвигая по очереди одного короля. Допускаются ходы на одно поле влево, вниз или влево-вниз по диагонали. Выигрывает тот, кому удастся поставить короля на левый нижний угол. При каких начальных положениях короля выигрышная стратегия есть у начинающего, а при каких – у его партнера?

822'. Имеются 2 кучи камней. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Выигрывает взявший последние камни. При каком числе камней в кучах выигрывает начинающий?

823. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль. Кто выиграет при правильной игре?

824. На доске сначала написано число 1. Каждым ходом к числу можно прибавить 3, 5 или 7. Чуня и Проня ходят по очереди так, что после любого хода Чуни получаются четные числа, а после любого хода Прони – нечетные. Требуется, чтобы все эти нечетные числа были *простыми*.⁴⁷ Цель Прони – назвать число, большее ста. Цель Чуни – помешать Проне. (Если первым назовет число, большее 100, Чуня, выигравшим все равно считается Проня.) Кто выиграет при правильной игре?

825. Играют двое. Первый называет произвольное целое число от 2 до 9. Второй умножает это число на произвольное целое число от 2 до 9. Затем первый умножает результат на любое целое число от 2 до 9, и т.д. Выигрывает тот, кто первым получит произведение большее 1 000. Кто при правильной игре выигрывает – начинающий или его партнер? Каков секрет победы?

826. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперед. Если вначале часовая стрелка указывает на 12, а победителем объявляется тот, после чьего хода она указала на 6, узнайте, кто победит при правильной игре.⁴⁸

827. В одной куче 18 конфет, в другой – 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят на две кучи. Кто не может поделить (если в куче одна конфета), проигрывает. Есть ли у начинающего выигрышная стратегия?

⁴⁷ Простое число – это натуральное число p , которое имеет ровно два различных делителя: 1 и p . Первые простые числа таковы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

⁴⁸ Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем остановится на цифре 6.

80. Симметрия

– Если сможешь, угадай,
 что ответит попугай?
– То и скажет, полагаю,
 что вдолбили попугаю!

Б.Заходер

828. Двое по очереди ставят по одному коню на шахматную доску. Нельзя ставить фигуру под бой ранее поставленной (не важно, самим игроком или его противником) фигуры. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

829. Двое по очереди ставят слонов на клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет.) Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией?

Попытка решения. Поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, естественно попробовать симметричную стратегию. Но слона нельзя ставить на центр симметрии доски⁴⁹. Значит, скорее всего, победит второй игрок, создавая каждым своим ходом центрально-симметричную позицию. Казалось бы, это и есть выигрышная стратегия. Однако, следуя ей, второму игроку не всегда удастся сделать даже один ход! Слон, только что поставленный первым игроком, может оказаться на диагонали и бить центрально-симметричное поле.

Этот пример показывает, что нельзя забывать о следующем обстоятельстве: *очередному симметричному ходу может помешать ход, только что сделанный противником.*⁵⁰ Чтобы решить игру при помощи симметричной стратегии, необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению избранного плана.

830. В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает переправивший последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

831. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки. За один раз можно оборвать 1 или 2 соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

⁴⁹ Если бы играли на доске 7×7 , то выиграл бы первый, сразу же заняв центр и поддерживая симметрию.

⁵⁰ Ранее сделанные ходы, в силу симметрии позиции, помешать не могут.

832. На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы они не имели а) общих сторон; б) общих точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

833. На окружности даны 20 точек. Двое по очереди проводят хорды с концами в этих точках так, чтобы хорды не пересекались. Проигрывает тот, кто не сможет провести хорду. Хорды а) могут; б) не могут иметь общие концы. Кто победит при правильной игре?

834. Имеются а) 2; б) 3 одинаковые кучи камней. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает взявший последние камни. Кто выиграет при правильной игре?

835. Соты имеют форму квадрата 9×9 (рис.162). Все квадратики, кроме центрального, заполнены медом. В центре

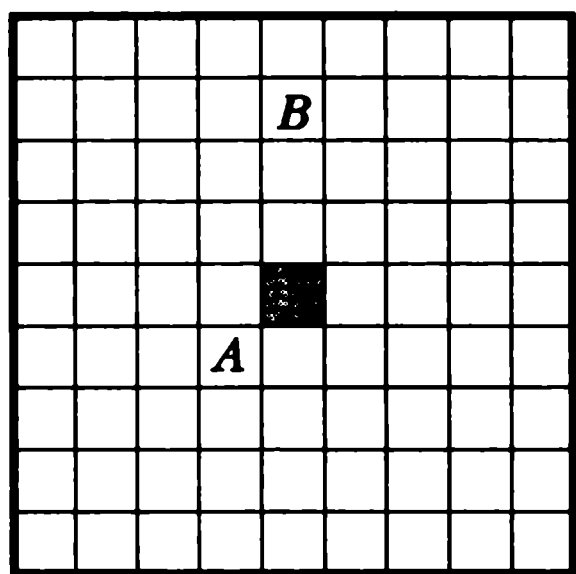


Рис. 162

— деготь. За один ход разрешается разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дегтя. Проигрывает тот, кому остался только деготь. Кто выиграет при правильной игре? А если деготь находится не в центре, а в клетке А? В?

836. Два игрока по очереди красят стороны 37-угольника так, чтобы никакие соседние стороны не оказались одноцветными. Игра заканчивается, когда окрашены все

стороны. Проигрывает тот, кто последним ввел в игру новый цвет. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

81. Калитка Эдисона

837. На фестивале камерной музыки собрались 6 музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из 6 музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

838. Многочисленные посетители Томаса Эдисона удивлялись, почему калитка в саду перед домом великого изобретателя открывается с трудом. Наконец, один из друзей не выдержал: «Неужели такой технический гений, как ты, не может отрегулировать калитку?» — «Калитка отрегулирована

правильно, – возразил Эдисон. – Я сделал от нее привод к цистерне, и каждый, кто приходит ко мне, накачивает в цистерну 20 литров воды.»

Если бы каждый посетитель вместо 20 литров накачивал 25 литров воды, то для заполнения цистерны понадобилось бы на 12 человек меньше.

Сколько воды вмещает цистерна?

839. Разрешается переставлять любые две строки таблицы. Разрешается менять местами и любые два ее столбца. Можно ли таким образом из левой таблицы получить правую?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

12	9	6	11
4	1	7	3
8	5	10	7

840. Сколько выстрелов в игре «Морской бой» на доске 7×7 надо сделать, чтобы наверняка ранить четырехклеточный корабль (рис.163)? (Корабль может быть расположен или вертикально, или горизонтально.)



Рис.163

841. Бикфордов шнур горит неравномерно, а сгорает ровно за 1 минуту. Можно ли при помощи двух таких шнуров отмерить ровно 45 секунд?

842. а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равностороннего треугольника. б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в*) Выясните, для каких правильных n -угольников аналогичное утверждение верно, для каких – нет.

843. На бумаге записана последовательность из 360 цифр: 123123...123123...123. На какое наибольшее число частей можно разрезать бумагу, чтобы все числа на полученных при этом кусках бумаги были разными?

844. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике – 50, по информатике – 48. Когда учеников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одной», а ответ «в трех» – втрое меньше, чем ответ «в одной». Сколько всего учеников участвовали в этих олимпиадах?

845. Трое играли в шашки. Всего сыграли три партии. Сколько партий сыграл каждый?

846. В доску вбили а) 10; б) n гвоздей и соединили их проводами – каждый с каждым. Сколько понадобилось проводов?

847. Шахматисты сыграли 224 партии. Каждые двое сыграли друг с другом одно и то же число партий. Сколько было шахматистов?

848. Сыграв по 5 партий, два участника кругового шахматного турнира выбыли из игры, и по этой причине в турнире было сыграно лишь 38 партий. Сыграли ли эти шахматисты друг с другом?

849. Вовочка устроил пресс-конференцию по случаю своего дня рождения. Все собранные журналисты были знакомы

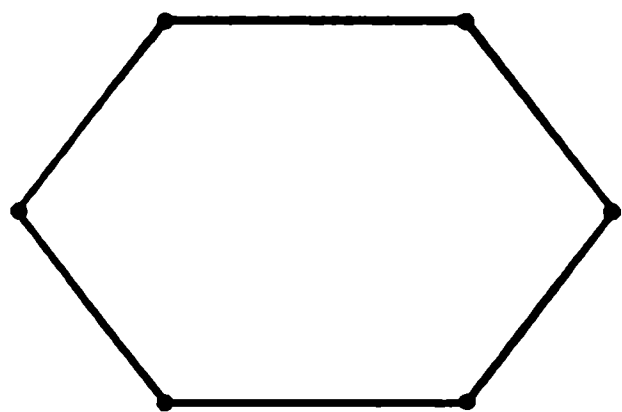


Рис. 164

друг с другом и все обменялись рукопожатиями. Когда вошел Вовочка, он обменялся рукопожатиями с теми журналистами, с которыми он был знаком. В результате всего было сделано 80 рукопожатий. Со сколькими из приведенных на пресс-конференцию журналистов был знаком Вовочка?

850. На рисунке 164 изображены 6 отрезков, у которых 6 концов. Сколько концов может быть у 6 разных отрезков? (Укажите все возможности и каждую подтвердите рисунком.)

82. Что такое граф?

Термин «граф» впервые появился в книге венгерского математика Д.Кёнига в 1936 году, хотя начальные важнейшие теоремы о графах восходят к Л.Эйлеру (1707–1783).

Граф состоит из вершин (точек) и ребер (линий). Точное математическое определение графа дать не сложно, но, пожалуй, для первого знакомства оно скучновато. Поэтому лучше запомните, что не имеет значения, какой длины и какой формы линии соединяют вершины графа. Важно лишь, какие вершины соединены ребрами, а какие – нет.

Один и тот же граф можно нарисовать разными способами. Например, если в турнире пяти команд А, В, С, D, Е команда А сыграла с В, D и Е, команда С сыграла с В и D,

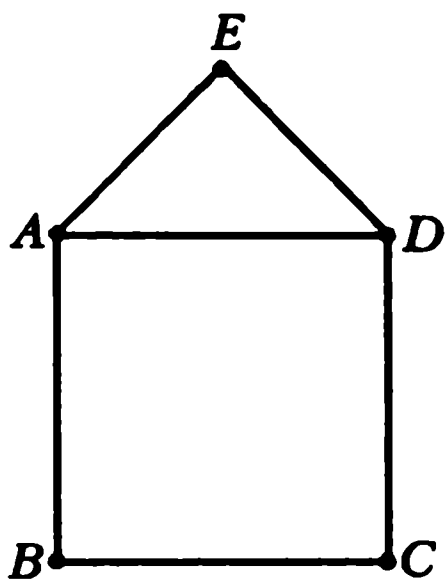


Рис.165

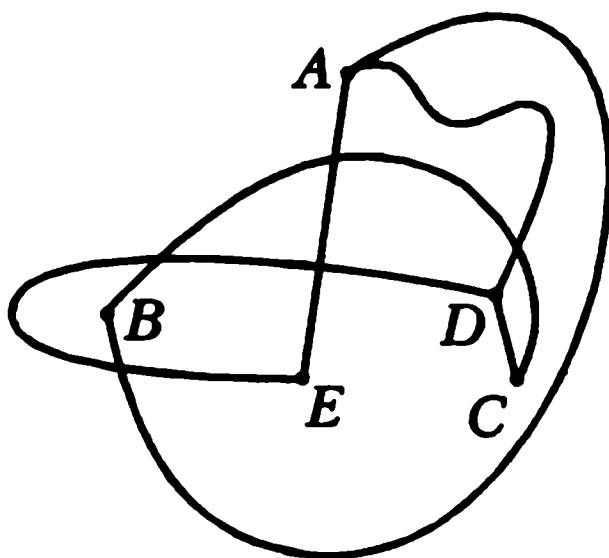


Рис.166

и еще D сыграла с E , то рисунки 165 и 166 правильно изображают описанную ситуацию.

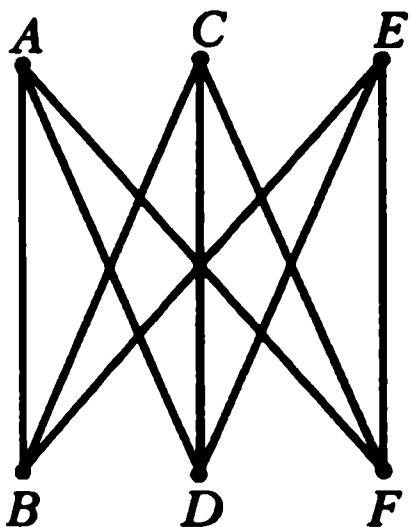


Рис.167

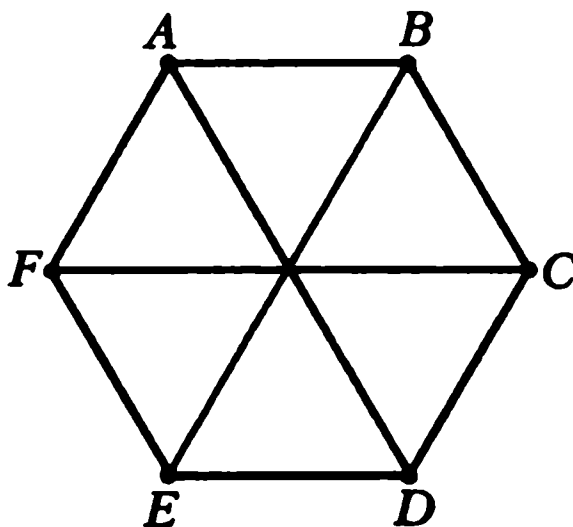


Рис.168

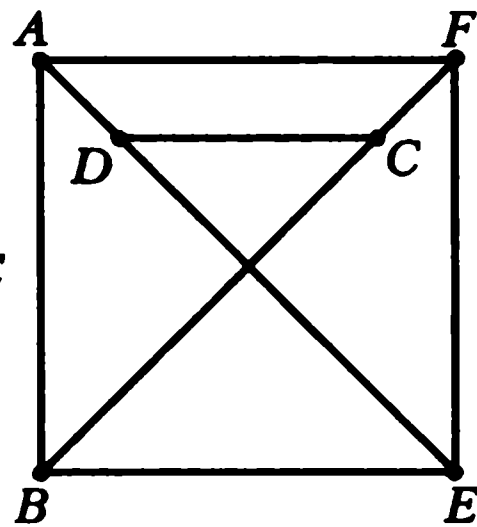


Рис.169

Одинаковые, но по-разному нарисованные графы называют изоморфными. Например, графы рисунков 167–169 изоморфны.

83. Степени вершин графа

Количество ребер, выходящих из данной вершины, называют степенью («валентностью») этой вершины. Например, на рисунке 170 вершина A имеет степень 3, вершина B – степень 2, вершина C – степень 1, а вершина D – степень 0.

Если мы сложим степени всех вершин некоторого графа, то при этом подсчете каждое ребро будет учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому количество ребер графа в два раза меньше суммы степеней его вершин.

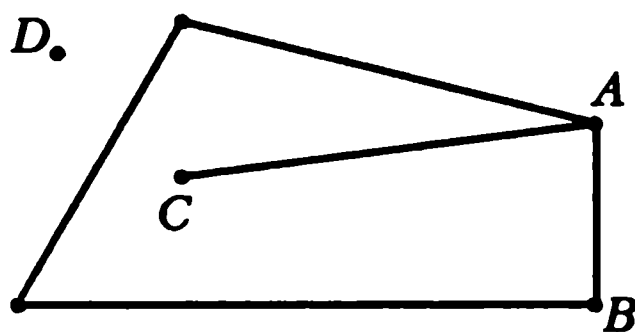


Рис.170

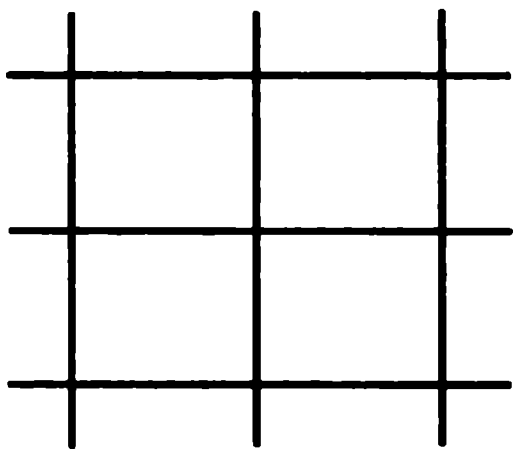


Рис. 171

851. Можно ли расположить на плоскости 7 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

852. а) Можно ли расположить на плоскости 8 отрезков, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими? (На рисунке 171 показано, что 6 отрезков так расположить можно.)

б) Расположите 4 вертикальных и 4 горизонтальных отрезка, чтобы каждый отрезок пересекал 3 отрезка другого направления (т.е. каждый вертикальный – 3 горизонтальных, а каждый горизонтальный – 3 вертикальных).

853. При каких n можно расположить в пространстве n одинаковых шаров так, чтобы каждый касался ровно трех других?

Граф называют связным, если любые две его вершины могут быть соединены путем⁵¹, т.е. если из любой вершины в любую другую можно пройти по ребрам графа.

Путь – последовательность ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

Возникает естественный вопрос: как выглядит несвязный граф? Он состоит из нескольких «кусков» – компонент связности. От каждой из вершин компоненты связности можно добраться по ребрам графа до любой другой. А от вершины одной компоненты до вершины другой компоненты пройти по ребрам нельзя. Например, изображенный на рисунке 172 граф состоит из 9 компонент (две из них – изолированные вершины). Каждая компонента является связным графом. Связный граф имеет единственную компоненту связности.

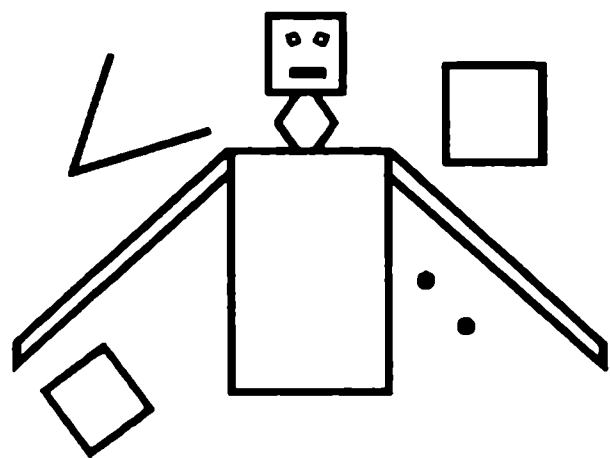


Рис. 172

854. В графе 15 вершин. Степени его вершины A и B не меньше 7 каждая. Докажите, что по ребрам графа можно пройти из A в B .

⁵¹ Путь – последовательность ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

Решение. Из вершины A выходит не менее чем 7 ребер. Из B – тоже не менее 7 ребер. Если бы из A нельзя было по ребрам добраться до B , то в графе было бы не менее $1 + 7 + 1 + 7 = 16$ вершин (рис.173). Но вершин только 15.

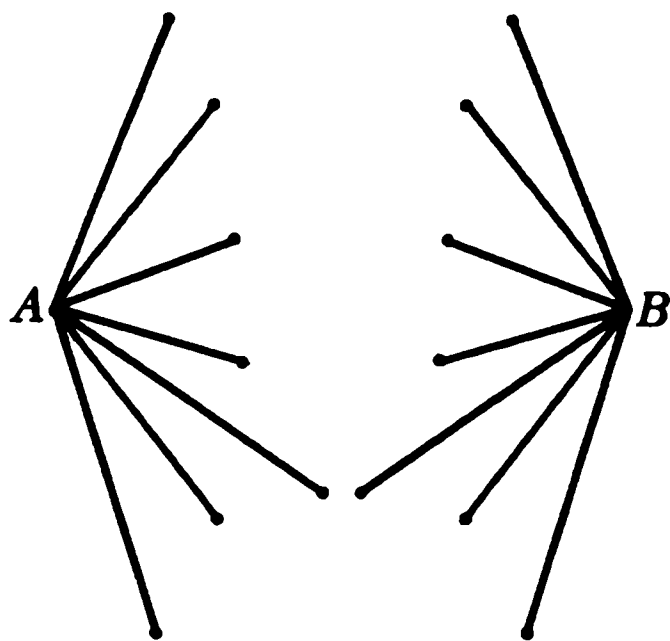


Рис.173

855. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не меньше $(n - 1)/2$, связан.

84. Турниры

Круговой турнир – это турнир, в котором каждые две команды играют друг с другом ровно один раз. При этом в шахматах победа приносит 1 очко, ничья – $1/2$ очка, поражение – 0 очков; а в футболе за это дают, соответственно, 3, 1 и 0 очков. В волейболе и теннисе ничьих не бывает.

856. Каждый из 8 шахматистов сыграл с каждым по одной партии. Они набрали, соответственно, 7; 6; 4; 3,5; 3,5; 2; 1,5 и 0,5 очков. Сколько очков игроки, занявшие первые три места, потеряли в партиях с остальными шахматистами?

857. В однокруговом футбольном турнире участвовали 6 команд. Команды набрали 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. Сколько матчей закончились вничью?

858. В турнире участвовали 8 шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Все они набрали различное число очков. Занявший второе место набрал столько же очков, сколько набрали вместе шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой занявшие 3-е и 5-е места?

859*. После окончания шахматного турнира, проходившего в один круг (каждый участник сыграл с каждым одну партию), его участники – Щукин, Окунев, Ершов, Карасев и Пескарев – обменивались впечатлениями.

– Удивительно, но только я один не испытал горечь поражения, – сказал Окунев.

– А вот мне единственному не удалось одержать ни одной победы, – заметил Пескарев.

Восстановите турнирную таблицу, т.е. выясните, кто как с кем сыграл, если известно, что Щукин набрал очков больше, чем

Окунев, Окунев – больше, чем Ершов, Ершов – больше, чем Карасев, а Карасев – больше, чем Пескарев.

860*. а) В футбольном турнире участвовали 17 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Могло ли у каждой команды число побед оказаться равным числу ее ничьих? Каков ответ, если в турнире участвовали б) 16; в) 15 команд?

861. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

862. В шахматном турнире участвовало втрое больше мужчин, чем женщин. Каждые двое сыграли по одной партии. Мужчины набрали в 1,2 раза больше очков, чем женщины. Сколько было шахматистов?

863. В шахматном турнире участвовало n шахматистов – мастера и гроссмейстеры. После окончания турнира оказалось, что каждый участник ровно половину своих очков набрал в партиях против мастеров. Докажите, что n – квадрат целого числа.

864. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым одну партию. Оказалось, что все, кроме Бори, набрали одинаковое число очков. Докажите, что Боря либо у всех выиграл, либо всем проиграл.

865*. Шесть волейбольных команд решили провести турнир в один круг так, чтобы каждая команда ежедневно играла одну игру. Первые три дня команды играли, выбирая партнеров случайным образом, но с условием, что все три дня они играют с разными командами. Сможет ли появившийся судья турнира составить расписание на оставшиеся два дня так, чтобы все команды сыграли со всеми ровно по одному разу?

85. Десятичная система счисления

Если бы люди имели двенадцать пальцев, то была бы принята двенадцатеричная система счисления.

По-чукотски глагол считать («рылгык») происходит от слова «рылг» – палец и значит, собственно, «пальчить». Десять по-чукотски обозначает как «две руки», а слово двадцать происходит от слова «человек» – весь человек, т.е. все пальцы на руках и ногах.

Вообще, видимо, сначала у многих народов господствова-

ла не десятиричная, а двадцатеричная система. Это отразилось и в строении числительных: например, по-французски 80 обозначается *quatre vingt*, т.е. «четырежды 20», – совсем как по-чукотски.

Заметьте, что в русском языке слово «сорок» резко отличается от других числительных, обозначающих десятки (три · пять, пять · десять), а чтобы обозначить очень большое число, употребляют старинное выражение «сорок сороков». По всей вероятности, это рудимент системы счета «по сорок». Кстати, посчитав мысленно до пяти какие-нибудь предметы, можно заметить еще один интересный факт: два, три, четыре предмета, но пять и больше – предметов! Окончание меняется неукоснительно...

Не все народы и не всегда считают только с помощью пальцев. Например, одно из папуасских племен Новой Гвинеи считает так: мизинец левой руки, безымянный, средний палец, указательный палец, большой палец, запястье, локоть, плечо, левая сторона груди, правая сторона груди. Но характерно, что и здесь используется в качестве опоры именно человеческое тело. Лишь в дальнейшем числительные как бы отрываются от этой опоры и начинают употребляться самостоятельно.

866. Число 444...44 не делится на 8 ни при каком количестве четверок. Докажите это.

Указание. Воспользуйтесь признаком делимости на 8. Или попробуйте делить столбиком. Или подумайте, что будет, если разделить не на 8, а на 4.

867. Какое двузначное число от перестановки цифр увеличивается в 4,5 раза?

Указание. Двузначное число $\overline{xy} = 10x + y$ после перестановки цифр превращается в $\overline{yx} = 10y + x$. (Черта над буквами проведена, чтобы никто не спутал число, составленное из цифр x и y , с произведением $x \cdot y$.)

868. Нечетные числа от 1 до 49 выписали в виде таблицы (рис.174). Из каждой строки таблицы выбрали по одному числу так, чтобы никакие выбранные числа не стояли в одном столбце. Чему равна сумма выбранных чисел?

869. В таблицу 10×10 записали числа от 1 до 100 по порядку (рис.175).

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

Рис.174

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 175

Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число. Найдите сумму всех девяти таких трехзначных чисел. Зависит ли она от порядка, в котором расставлены цифры?

86. Какое это число?

Прежде чем решать следующие ребусы, вспомним, что, например, число 3765 можно записать в виде $3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 5$ или в виде $37 \cdot 100 + 65$. Точно так же зашифрованное число МАША можно записать в виде $M \cdot 1000 + A \cdot 100 + Ш \cdot 10 + A = M \cdot 1000 + A \cdot 101 + Ш \cdot 10$.

871. Решите ребус ЧАЙ : АЙ = 5.

872. Решите ребус а) ЛИК · ЛИК = БУБЛИК;

б) СУК · СУК = БАРСУК.

873. Сережа записал некоторое пятизначное число и умножил его на 9. К своему удивлению, он получил в результате число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое число записал Сережа?

874. К трехзначному числу приписали рядом его же (например, 548 548) и разделили получившееся шестизначное число на 13. Частное разделили на 11, а новое частное – на 7. Что получилось?

875. Написали подряд три раза двузначное число (например, 59 59 59). Докажите, что полученное число делится на 3, 7, 13 и 37.

876. Докажите, что число, записанное шестью одинаковыми цифрами, делится на 3, 7, 11, 13 и 37.

Затем часть чисел стерли так, чтобы во всех строках и столбцах таблицы осталось ровно по 5 чисел. Найдите сумму оставшихся чисел.

Наводящий вопрос. Пусть отметили 10 чисел так, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы – ровно одно отмеченное число. Чему равна сумма всех отмеченных чисел?

870. По кругу расставлены цифры 1, 2, ..., 9 в произвольном порядке.

877. Докажите, что если трехзначное число \overline{xuz} делится на 37, то числа \overline{uzx} и \overline{zux} тоже делятся на 37.

878. Что больше:

19941994 · 199519951995 или 19951995 · 199419941994?

879. Найдите все трехзначные числа, которые в 25 раз больше суммы своих цифр.

879'. Какие трехзначные числа в 11 раз больше суммы своих цифр?

880. Трехзначное число начинается цифрой 4. Если ее перенести в конец числа, то получим число, составляющее $\frac{3}{4}$ исходного. Найдите исходное трехзначное число.

881. Какие двузначные числа в сумме с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, дают полный квадрат?

882. В трехзначном числе зачеркнули первую слева цифру, затем полученное двузначное число умножили на 7 и получили исходное трехзначное число. Найдите такое число.

883. Число оканчивается цифрой 5. Если ее зачеркнуть, то число уменьшится на 1994. Найдите это число.

884*. Некоторое число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

885. Может ли целое число при зачеркивании первой цифры уменьшиться в а) 57 раз; б) 58 раз?

886. Пятизначное число, все цифры которого различны, умножили на 4. В результате получилось число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое это число?

887. На каждом километре шоссе между селами Ёлкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Ёлкина, а на другой — сколько до Палкина. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр⁵² равна 13. Каково расстояние от Ёлкина до Палкина?

888. Дано 300-значное число 112112...112 (число 112 записано 100 раз подряд). Сколько различных 298-значных чисел можно получить из него вычеркиванием двух цифр?

⁵² Для Придиры. Суммируются цифры обеих сторон столба. Никаких дробных расстояний в этой задаче нет.

87. Системы счисления

Когда учительнице надо подсчитать, сколько у нее первоклассников, она выстраивает их парами. Директор школы пересчитывает учеников по классам (правда, ему мешает то, что в классах не всегда поровну учащихся).

При подсчете многих объектов удобно группировать их по несколько штук, например, по 5 или по 10 (впрочем, иногда и по 12 – вспомните слово «дюжина», иногда по 7 – в неделе 7 дней).

	Римская	Двоичная	Троичная	Четверичная
1	I	1	1	1
2	II	10	2	2
3	III	11	10	3
4	IV	100	11	10
5	V	101	12	11
6	VI	110	20	12
7	VII	111	21	13
8	VIII	1000	22	20
9	IX	1001	100	21
10	X	1010	101	22
11	XI	1011	102	23
12	XII	1100	110	30
13	XIII	1101	111	31
14	XIV	1110	112	32
15	XV	1111	120	33
16	XVI	10000	121	100
22	XXII	10110	211	112
28	XXVIII	11100	1001	130
48	XLVIII	110000	1210	300
101	CI	1100101	10202	1211
151	CLI	10010111	12121	2113
1966	MCMLXVI	11110101110	2200211	132232
5000	MMMM	1001110001000	20212012	1032020

В римской системе счисления⁵³ есть особые знаки для единиц – I, пяти – V, десяти – X, пятидесяти – L, ста – C, пятисот – D, тысячи – M (см. таблицу). Римская система более или менее пригодна для сложения и вычитания, но совсем неудобна для умножения и деления.

⁵³ Система счисления – это способы записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций.

Если в записи положение цифр (знаков) не играет важной роли, то систему счисления называют непозиционной. Непозиционными были системы счисления у древних египтян, греков. Впервые позиционная система счисления возникла в Древнем Вавилоне. При перемещении знака происходило изменение значения числа в 60 раз. Следы вавилонской системы счисления сохранились до наших дней: в часе – 60 минут, в минуте – 60 секунд.

Позиционная система требует обозначения пропущенного разряда. Такой знак встречается в поздних клинописных табличках. Привычная нам цифра 0 родом из Индии, где десятичная система возникла в VI веке и окончательно сформировалась к IX веку.

Долгое время понятие нуля казалось непонятным и абстрактным (зачем нужен знак для того, чего нет?), но в конце концов преимущества нового способа записи чисел стали ясны всем. Теперь каждый грамотный человек, увидев запись «2653», понимает, что речь идет о числе «две тысячи шестьсот пятьдесят три». Здесь последняя цифра (3) обозначает количество единиц, предпоследняя (5) – количество десятков, третья с конца цифра (6) – количество сотен, четвертая с конца (2) – количество тысяч.

Таким образом, записывая «2653», мы имеем в виду число $2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Особая роль отводится числу десять: все числа представляются в виде суммы различных степеней десятки с коэффициентами, принимающими значения от 0 до 9. Поэтому эта система и называется десятичной.

А что будет, если вместо десяти использовать какое-нибудь другое число, например, шесть? Нам потребуется шесть цифр-символов. В качестве них мы можем взять знакомые нам символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, которые будут обозначать числа от нуля до пяти. Число шесть мы примем за единицу следующего разряда и поэтому в нашей новой системе счисления оно будет записываться так: 10. Продолжая аналогию, мы можем представить любое натуральное число в виде суммы различных степеней шестерки с коэффициентами от нуля до пяти. Например:

$$7 = 1 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0, \quad 12 = 2 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0,$$

$$45 = 1 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0.$$

Поэтому в новой системе счисления, которая называется

шестеричной, естественно записывать число 7_{10} как 11_6 , число 12_{10} как 20_6 , а 45_{10} как 113_6 .

Нетрудно понять, что в шестеричной системе счисления можно записать любое натуральное число. Покажем, как это сделать для числа 450_{10} (в этом примере, как и ранее, индекс обозначает основание системы счисления). Наибольшее число, являющееся степенью шестерки и не превосходящее 450 – это 216. Разделим 450 на 216 с остатком:

$$450 = 2 \cdot 216 + 18.$$

Неполное частное равно 2. Поэтому первой цифрой шестеричной записи числа 450 будет 2.

Остаток от деления равен 18. Разделим его на предыдущую степень шестерки (на первом этапе мы делили на 6^3 , а теперь – на 6^2) с остатком:

$$18 = 0 \cdot 36 + 18.$$

Неполное частное равно нулю, поэтому вторая цифра – 0. Остаток равен 18.

Разделим с остатком 18 на 6^1 :

$$18 = 3 \cdot 6 + 0.$$

Значит, третья цифра равна 3, а остаток – 0. Таким образом, последняя цифра равна 0. Итак, $450_{10} = 2030_6$.

При построении новой системы счисления мы не пользовались никакими специфическими свойствами числа 6. Аналогично по любому натуральному числу n , большему 1, можно построить n -ичную систему счисления, в которой запись числа связана с его разложением по степеням числа n .

Число n называется основанием системы счисления. Для записи чисел в n -ичной системе счисления нужно n цифр. Число, записанное цифрами a_k, a_{k+1}, \dots, a_0 в n -ичной системе, равно $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$.

Еще в XVII веке немецкий математик Лейбниц предложил перейти на двоичную систему счисления. Этому помешала не только традиция, но и то, что в двоичной системе счисления запись чисел слишком длинна. Например, $106 = 1101010_2$. Однако в XX веке, когда были созданы компьютеры, оказалось, что для выполнения арифметических операций на машинах наиболее удобна именно двоичная система счисления.

Удобным компромиссом между человеком и машиной являются шестнадцатеричная и восьмеричная системы

счисления. Дело в том, что очень легко переводить числа из двоичной системы в любую из них; по краткости же записи 8-ичная система почти такая, как десятичная, а 16-ичная даже короче.

889. Сколько цифр необходимо иметь в а) двоичной; б) n -ичной системе счисления?

890. Запишите в десятичной системе счисления числа 10101_2 , 10101_3 , 211_4 , 126_7 , 158_{11} .

891. Запишите число 100_{10} в двоичной, троичной, четверичной, пятеричной, шестеричной, семеричной, восьмеричной и девятеричной системах счисления.

892. Запишите число 111_{10} в одиннадцатеричной системе счисления (в качестве недостающей цифры «10» принято использовать букву А).

893. Запишите число 1110100111_2 в шестнадцатеричной системе счисления (в качестве недостающих цифр от 10 до 15 принято использовать буквы А, В, С, D, Е, F).

894. Переведите число 10010111001101_2 из двоичной в восьмеричную систему счисления.

Операция над натуральными числами в n -ичной системе счисления выполняются в обычном порядке, с той лишь разницей, что для каждой системы счисления надо брать свои таблицы сложения и умножения. Особенно простой вид эти таблицы имеют для двоичной системы счисления. Для троичной системы таблицы таковы:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Складывают и умножают числа, записанные в произвольной системе счисления, так же, как и в десятичной системе («в столбик»). Однако нужно помнить, что перенос в следующий разряд происходит тогда, когда результат превышает основание данной системы счисления (или равен ему).

Для успешного выполнения этих операция необходимо (так же как и в десятичной системе счисления) знать

таблицы сложения и умножения для чисел, меньших основания системы счисления (т.е. записываемых одной цифрой).

895. Составьте таблицы сложения и умножения для а) четверичной; б) пятеричной; в) 15-ичной систем счисления.

896. Вычислите а) $1100_2 + 1101_2$; б) $201_3 \cdot 102_3$.

88. Двоичная система счисления

В двоичной системе счисления таблицы сложения и умножения удивительно просты:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0,$$

$$0 + 1 = 1, \quad 0 \cdot 1 = 0,$$

$$1 + 1 = 10, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Пользуясь этими таблицами, легко складывать и вычитать:

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 11 \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 101 \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ - 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110110011 \\ + 10111 \\ \hline 111001010 \end{array}$$

Эти примеры в десятичной системе выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 3 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 5 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ - 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 435 \\ + 23 \\ \hline 458 \end{array}$$

Умножать в двоичной системе еще приятнее:

$$\begin{array}{r} 11101 \\ \times 101 \\ \hline + 11101 \\ 11101 \\ \hline 10010001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times 1101 \\ \hline 11011 \\ + 11011 \\ 11011 \\ \hline 101011111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111011 \\ \times 1100101 \\ \hline 10111011 \\ + 10111011 \\ 10111011 \\ \hline 100100000100111 \end{array}$$

В десятичной системе эти примеры выглядят так:

$$29 \cdot 5 = 145, \quad 27 \cdot 13 = 351, \quad 187 \cdot 101 = 18887.$$

В двоичной системе можно записать не только целые числа. Например, двоичная запись 101, 1010111 в десятичную систему переводится следующим образом:

$$4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = 5,6796875.$$

897. Сначала выполните действия в десятичной системе, затем переведите числа в двоичную систему, выполните те же действия в двоичной системе и ответ переведите в десятичную систему⁵⁴: а) $20 + 40$; б) $1998 + 23$; в) $23 \cdot 34534$; г) $460 \cdot 21$.

898. Замените звездочки цифрами, чтобы получились правильные примеры действий в двоичной системе счисления:

$$\begin{array}{r} \text{а) } 10110* \\ + 1*100 \\ \hline 1000*01 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } 11*1*1*0*00 \\ + 1000110 \\ \hline 1110010011* \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } 11*1 \\ \times 110 \\ \hline 1**1 \\ + 1101 \\ \hline 10111* \end{array}$$

89. Расположите на плоскости

899. Расположите на плоскости а) 6; б) 8 точек и соедините их непересекающимися отрезками, чтобы каждая точка была соединена отрезками ровно с четырьмя другими.

900. На рисунке 176 непересекающимися отрезками соединены 16 точек так, что из каждой точки выходит 5 отрезков. Расположите 12 точек и соедините некоторые из них отрезками так, чтобы 9 точек лежали внутри треугольника с вершинами в трех других точках, этот треугольник был бы разбит на треугольники и каждая точка была бы соединена ровно с 5 другими.

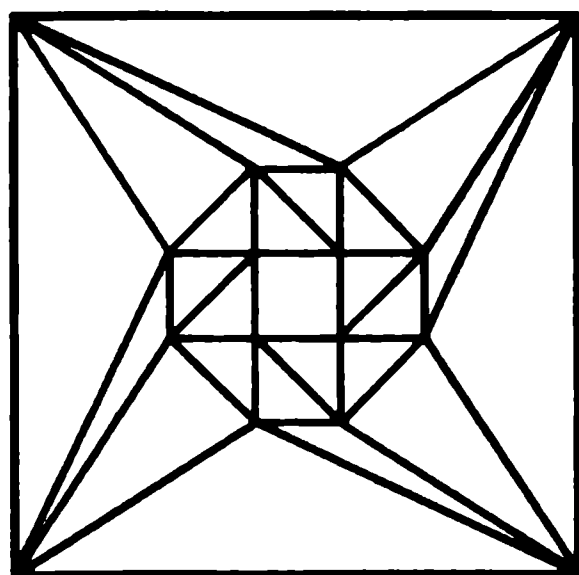


Рис. 176

901. В 6 клетках таблицы 4×4 стоят звездочки. Докажите, что можно вычеркнуть 2 строки и 2 столбца, не оставив ни одной звездочки. А если звездочек 7?

902. a и b – натуральные числа. Известно, что из четырех утверждений

- 1) $a + 1$ делится на b ,
- 2) $a = 2b + 5$,
- 3) $a + b$ делится на 3,
- 4) $a + 7b$ – простое число

три верны, а одно неверно. Найдите все возможные пары a, b .

⁵⁴ Если не совпадает – ищите ошибку!

903. а) Сегодняшняя дата записывается так: 15.05.00. Напишите ближайшую дату в будущем, в которой все цифры различны.

б) То же, но год записывается четырьмя цифрами.

90. Разложение на множители

*Дважды два – четыре,
два да три – пять.
Вот и все, что мы можем,
Что мы можем знать.*

О.Мандельштам

904. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько в доме этажей, если всего в нем 105 квартир?

905. а) Придумайте 10 натуральных чисел, у которых и сумма, и произведение равны 20.

б) Представьте число 203 в виде суммы нескольких натуральных чисел, произведение которых тоже равно 203.

906. Существует ли трехзначное число, каждая цифра которого является его простым делителем, а других простых делителей нет?

907. Может ли произведение цифр натурального числа равняться 528?

908. Решите ребус: $K \cdot O \cdot T = Y \cdot Ч \cdot Ё \cdot H \cdot Ы \cdot Й$.

909. Известно, что произведение двух взаимно простых чисел равно 864. Найдите эти числа.

910. Произведение числа 21 на некоторое четырехзначное число – точный куб. Найдите это четырехзначное число.

911. В этом числовом ребусе почти все неизвестно, однако он имеет единственное решение. Какое?

$$\begin{array}{r} \times \quad \text{***} \\ \quad \text{***} \\ \hline + \quad \text{****} \\ \quad \text{***} \\ \hline \text{AAAAA} \end{array}$$

912. Каждое из двух различных натуральных чисел умножили на сумму его цифр. Могли ли получиться равные результаты?

913. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

914. Можно ли расставить в клетках таблицы 3×3 числа $1, 2, \dots, 9$ так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце делилось на 4?

Указание. На какую степень числа 2 делится произведение всех чисел от 1 до 9?

915. Найдите последние восемь цифр числа⁵⁵

$$30! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30.$$

916. Какое наименьшее число сомножителей нужно вычеркнуть в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99$ так, чтобы произведение оставшихся сомножителей оканчивалось цифрой 2?

917. а) Царь Дадон захватил 100 пленников и посадил их в одиночные камеры. К замкам всех 100 камер подходил один ключ. Его поворот отпирал замок, следующий поворот запирали, еще один отпирал и т.д. Ко дню своего рождения царь решил освободить заключенных и накануне послал слугу, который вставил ключ в замок каждой камеры и повернул на один оборот. Все двери оказались отперты. Однако день рождения еще не наступил, и стража не выпускала никого из камер. Едва посыльный возвратил ключ, царь Дадон поручил новому посланцу повернуть ключ в замке каждой второй камеры. Двери второй, четвертой, шестой, ... камер вновь оказались закрыты. Следующий посланец повернул ключ в замках третьей, шестой, девятой, двенадцатой и т.д. камер. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ключ в замке сотой камеры.

Наконец, наступил день рождения и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил царь Дадон?

б) Назовите 10 первых натуральных чисел, имеющих нечетное число делителей (делителем считается и 1, и само число).

в) Сформулируйте и докажите общее правило.

91. Количество делителей

Наука не может двигаться по заказу в том или другом направлении: она изучает только то, что в данный момент созрело, для чего выработаны методы исследования.

К.Тимирязев

Число $2^6 = 64$ имеет всего 7 делителей: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Вообще, степень p^n любого простого числа

⁵⁵ Для Премудрой Совы. Требуется найти последние 8 цифр записи числа $30!$ в десятичной системе счисления.

p имеет $n + 1$ делителей: $1, p, p^2, \dots, p^n$. Чтобы уяснить, чему равно количество делителей числа $5000 = 2^3 \cdot 5^4$, самое простое – рассмотреть табличку, столбцы которой соответствуют степеням двойки, а строки – степеням пятерки:

1	2	4	8
5	10	20	40
25	50	100	200
125	250	500	1000
625	1250	2500	5000

Если p_1, p_2, \dots, p_k – различные простые числа, a_1, a_2, \dots, a_k – натуральные числа, то число $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ имеет $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$ различных делителей (считая 1 и n). В самом деле, делители отличаются друг от друга показателями, с которыми входят в их разложения на простые множители числа p_1, p_2, \dots, p_k . Число p_i может либо вовсе не войти в разложение делителя, либо войти в него в любой степени от 1 до a_i ; всего имеется, стало быть, $a_i + 1$ возможность. Комбинируя эти возможности для различных простых делителей, мы и получим требуемое.

918. Сколько различных делителей имеет число

- а) 3^5 ;
- б) $3^5 \cdot 5$;
- в) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$?

919. Найдите число, которое а) делится на 12 и имеет 14 различных делителей; б) делится на 30 и имеет 30 различных делителей.

920. а) Найдите число, которое делится на 2 и 9 и имеет всего а) 14; б) 15; в) 17 делителей (включая 1 и само это число).

921. Произведение последовательных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ обозначают $n!$ и называют «эн-факториал». Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100!$ один из ста факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

92. Неравенства

Давайте бороться за то, чтобы успеваемость каждого ученика была выше средней!

922. Груша тяжелее яблока, а яблоко тяжелее персика. Что тяжелее: груша или персик?

923. Ручка дороже тетради, а карандаш дешевле ручки. Что дороже: карандаш или тетрадь?

924. В четырехэтажном доме Ваня живет выше Пети, но ниже Кати, а Марат живет ниже Пети. Кто на каком этаже живет?

925. 7 карандашей дороже 8 тетрадей. Что дороже: 8 карандашей или 9 тетрадей?

926. 9 одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же книг – 15 рублей с копейками. Сколько стоит книга?

927. 6 карасей тяжелее 10 лещей, но легче 5 окуней; 10 карасей тяжелее 8 окуней. Что тяжелее: 2 карася или 3 леща?

928. Решите ребусы:

а)

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \times \\ \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet 3 \\ + \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet 3 \end{array} \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \times \\ \bullet 2 \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \\ + \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet 9 \bullet 2 \bullet \end{array} \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{r} \bullet \bullet \bullet \bullet \\ - \\ \bullet \bullet \bullet \\ \hline 1 \end{array}$$

929. Число 5 277 319 168 является пятой степенью некоторого натурального числа. Какого?

930. Из цифр 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8 и 9 составьте число, являющееся шестой степенью некоторого натурального числа.

931. Решите ребус $УЖ^3 = ПИТОН$.⁵⁶

932. Миссис Дрю, домохозяйка из американского города Уотерлоу, потратила 5 лет и 2 473 листа бумаги на то, чтобы напечатать на машинке последовательно все числа от единицы до миллиона. Побудили ее к этому слова сына, в то время еще школьника, который утверждал, ссылаясь на учителя, что ни один человек в мире не сосчитал еще до миллиона, начав с единицы.

Определите, на одной или на двух сторонах листа печатала цифры миссис Дрю, если на каждой странице было 30 строк по 60 знаков в каждой, а между каждыми двумя числами она ставила запятую и пробел.

⁵⁶ Здесь 3 – не буква, а цифра.

933. Найдите делимое и частное в примере, где часть цифр заменена звездочками

$$\bullet \bullet \bullet 5 : 11 = \bullet \bullet .$$

934. Ира, Таня, Коля и Митя собирали ягоды. Таня собрала ягод больше всех. Ира собрала больше, чем Митя. Верно ли, что девочки собрали ягод больше, чем мальчики?

935. Петя, Вася, Коля и Толя подсчитывали после рыбной ловли свои трофеи. Толя поймал рыбы больше, чем Коля, а Коля – больше, чем Петя, Петя с Васей вместе поймали столько же, сколько поймали Коля и Толя. Какое место занял каждый по количеству выловленной рыбы?

936. Сумма тринадцати различных натуральных чисел равна 92. Найдите эти числа.

937. Перемножили три тысячи двоек. Докажите, что в записи получившегося числа а) не более 1000; б) не менее 900 цифр.

938. Что больше: а) 5^{300} или 3^{500} ; б) 2^{700} или 5^{300} ; в) 2^{300} или 3^{200} ?

939. На доске написали 5 чисел. Сложив их попарно, получили числа: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13 и 15. Какие числа на доске?

Пояснение. Из данных пяти чисел a, b, c, d и e можно образовать 10 сумм: $a + b, a + c, a + d, a + e, b + c, b + d, b + e, c + d, c + e$ и $d + e$. Но не ясно, в каком именно порядке даны эти числа (т.е. не сказано, какая именно из 10 сумм равна 0, какая равна 2, ..., а какая – 15).

940*. Представьте число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

941. Числа a и b таковы, что суммы $a + b$ и $3a + 2b$ положительны. Может ли быть отрицательным число $5a + 4b$? А число $2a + 3b$?

942. Бухгалтер каждый месяц подсчитывал доход и расход предприятия. Мог ли доход за любые 5 подряд идущих месяцев превышать расход, а за весь год, наоборот, оказаться меньше расхода?

943. Известно, что $-1 < 2x + 3 < 1$. В каких границах может при этом находиться $-2x + 4$?

944. Изобразите на координатной плоскости такие точки $(x; y)$, для которых а) $x \leq y$; б) $y > x$; в) $y \geq x \geq -y$.

945. Каждая сторона одного треугольника больше каждой

стороны другого. Обязательно ли площадь первого больше площади второго?

946. За какое наименьшее количество ходов можно перевести шахматного коня из левой нижней в правую верхнюю клетку доски размера 100×100 ?

Указание. Занумеруем вертикали доски слева направо числами от 1 до 100. Аналогично, занумеруем горизонтали снизу вверх, тоже числами от 1 до 100. За один ход коня сумма номеров горизонтали и вертикали той клетки, где он находится, может увеличиться, самое большее, на 3.

93. Делимость

Множество \mathbb{Z} целых чисел состоит из натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$, нуля и отрицательных целых чисел $-1, -2, -3, \dots$

Если a и b – целые числа, то их сумма, разность и произведение – целые числа. Однако деление (действие, обратное умножению) выполнимо в \mathbb{Z} не всегда.

Определение. Целое число a делится на целое число b , если найдется такое целое число k , что $a = kb$.

Например, 54 делится на 6, так как $54 = 9 \cdot 6$; 273 делится на 21, так как $273 = 13 \cdot 21$. Из определения делимости следует, что число 0 делится на любое число, включая 0,⁵⁷ но ни одно целое число, отличное от нуля, на нуль не делится.

Делимость a на b иногда выражают синонимами: a кратно b , b – делитель a . Для обозначения делимости a на b пишут: $a:b$ или $b \mid a$. Всякое целое число a делится по крайней мере на числа $a, -a, 1, -1$. Если a – простое число, то никаких других делителей оно не имеет.

947. Если целые числа a и b делятся на целое число m , то и сумма $a + b$ делится на m . Докажите это.

948. Если целые числа a и b делятся на целое число m , то и разность $a - b$ делится на m . Докажите это.

949. Если сумма нескольких слагаемых делится на m и известно, что все слагаемые, кроме одного, делятся на m , то и оставшееся слагаемое делится на m . Докажите это.

⁵⁷ Да, нуль – единственное целое число, которое делится нацело на 0 (хотя чему равно частное, я не знаю и не хочу знать). Многие во избежание схоластических споров запрещают спрашивать, какие именно числа делятся на 0. Они просто говорят, что делить на нуль нельзя. И правильно делают!

950. Если $3a + 4b + 5c$ делится на 11 при некоторых целых a , b и c , то $9a + b + 4c$ делится на 11.⁵⁸ Докажите это.

Зная разложения натуральных чисел a и b на простые множители, легко выяснить, делится ли a на b . Для того чтобы число a было кратным числу b , необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение b , входил и в разложение числа a , причем если простой множитель встречается k раз в разложении числа b , то он должен встретиться не менее k раз и в разложении числа a .

Натуральные числа m и n называются взаимно простыми, если единственным их общим делителем является число 1.⁵⁹

Другими словами, натуральные числа m и n взаимно просты, если n не делится ни на один из простых делителей m .

951. а) Некоторое число делится на 2 и на 3. Обязательно ли оно делится на 6? б) Верно ли, что если число делится на 3 и на 5, то оно делится на 15? г) Некоторое число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24?

94. Признаки делимости

Шкура неубитого медведя делится на любое число без остатка.

Б.Споров

952. На доске написано: $5*726$. Замените звездочку цифрой так, чтобы получившееся число делилось на 3.

Решение. Обозначим искомую цифру буквой x . Тогда

$$\begin{aligned} 5*726 &= 50000 + x \cdot 1000 + 700 + 20 + 6 = \\ &= 5 \cdot (9999 + 1) + x \cdot (999 + 1) + 7 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 6 = \\ &= (5 \cdot 9999 + x \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (5 + x + 7 + 2 + 6). \end{aligned}$$

Все слагаемые первой скобки нацело делятся на 3. Значит, сумма $5 + x + 7 + 2 + 6$ должна делиться на 3. Подходят цифры $x = 1, 4$ и 7 .

В общем случае, таким же образом можно доказать, что при делении на 3 натуральное число дает такой же остаток,

⁵⁸ Разумеется, при этих же значениях a , b , c .

⁵⁹ Для Придиры. -1 тоже общий делитель чисел m и n , но здесь речь идет о натуральных числах.

как и сумма его цифр. Из этого получается признак делимости на 3:

- Если сумма цифр целого числа делится на 3, то и само число делится на 3. И наоборот, если целое число делится на 3, то и сумма цифр этого числа делится на 3.

Эти два утверждения можно записать короче:

- Целое число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3.

Вот еще несколько признаков делимости:

- Целое число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четна.

- Целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4.

- Целое число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5.

- Целое число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8.

- Целое число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 9.

953. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

953'. К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

Указание. Признак делимости на 15 очень прост: число делится на 15 в том и только том случае, когда оно делится на 3 и на 5.

Поскольку $72 = 8 \cdot 9$ и числа 8 и 9 взаимно просты, можно сформулировать признак делимости: число делится на 72 в том и только том случае, когда оно делится на 8 и на 9.

954. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

955. Замените звездочки в записи числа $72*3*$ цифрами так, чтобы это число делилось без остатка на 45.

95. Признак делимости на 9

Как известно, $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, ... Значит, при делении на 9 степени числа 10 дают остаток 1.

Теорема. Натуральное число при делении на 9 дает такой же остаток, как и сумма его цифр.

Доказательство проведем на примере пятизначных чисел (оно похоже на рассуждение решения задачи 452):

$$\begin{aligned}\overline{abcde} &= a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e = \\ &= a \cdot (9999 + 1) + b \cdot (999 + 1) + c \cdot (99 + 1) + d \cdot (9 + 1) + e = \\ &= (a \cdot 9999 + b \cdot 999 + c \cdot 99 + d \cdot 9) + (a + b + c + d + e).\end{aligned}$$

Все слагаемые первой скобки кратны 9. Во второй скобке – как раз сумма цифр!

956. Число 82^{**} делится на 90. Найдите делимое.

957. К числу 13 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 36.

Указание. Примените сначала признак делимости на 4, затем – на 9.

958. Среди всех натуральных чисел, все цифры которых нечетны, а сумма цифр равна 18, найдите а) наибольшее; б) наименьшее.

959. Запись натурального числа (в десятичной системе счисления) состоит только из цифр 3 и 7, а сумма всех его цифр делится на 3 и на 7. Найдите наименьшее такое число (в записи числа действительно встречаются и 3, и 7).

960. В стране Анчурии в обращении имеются купюры следующих достоинств: 1 анчур, 10 анчуров, 100 анчуров, 1000 анчуров. Можно ли отсчитать миллион анчуров так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

961. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

962. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?

963. Сумма цифр двузначного числа не меняется после умножения этого числа ни на 2, ни на 3, ..., ни на 9. Найдите все такие числа.

964. К числу прибавили сумму его цифр. К получившемуся числу прибавили сумму его цифр, и так далее. Когда в седьмой раз к числу прибавили сумму его цифр, получили 1000. С какого числа начали?

965. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Посчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова посчитал сумму цифр, и так далее. В конце концов получилось однозначное число. Какое?

Замечание. Может показаться, что Незнайке придется очень много раз вычислять сумму цифр. А если подумать, становится ясно, что число $100!$ состоит менее чем из 200 цифр. Точный подсчет на компьютере показывает, что в десятичной записи числа $100!$ всего 158 цифр.

966. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитывается сумма его цифр и так до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше всего?

967. Записав подряд цифры от 1 до 9, получим девятизначное число: 123 456 789. а) Простое оно или составное? б) А если как-нибудь изменить порядок цифр в этом числе, изменится ли ответ на этот вопрос?

968. Сколько цифр в числе $11...11$, если оно делится на 999 999 999?

969. Вовочка придумал две новые теоремы: а) если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27; б) если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27. Сможет ли Мария Ивановна доказать эти теоремы?

970. Пусть n – натуральное число. Отбросим его последнюю цифру и прибавим утроенную последнюю цифру. Докажите, что полученное число кратно 29 тогда и только тогда, когда n кратно 29.

971. а) Мюнхгаузен вырезал из бумаги десять карточек и на каждой из них написал по цифре: 0, 1, 2, ..., 9. Затем он разложил их на столе по две и обнаружил, что получившиеся двузначные числа относятся как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Не ошибся ли он?

б) Через неделю барон потерял карточку с цифрой 0. Однако, подумав, он разложил карточки так, что новые числа относились как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Как он этого добился? (Достаточно найти ответ. Доказывать его единственность не обязательно, хотя очень полезно.)

972. а) Используя цифры 1, 2, ..., 9 (каждую – ровно один раз!), напишите три трехзначных числа так, чтобы второе из них было в два раза, а третье – в три раза больше первого. (Достаточно показать один способ, как это сделать.)

б) Можно ли из цифр 1, 2, ..., 9 составить три трехзначных числа, которые относятся, как 1 : 2 : 5?

973. Если к некоторому числу прибавить сумму его цифр, то получится 1995. Найдите это число.

974. Сумма цифр числа x равна y , а сумма цифр числа y равна z . Найдите x , если $x + y + z = 60$.

975. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр числа n . Решите уравнения:

а) $x + s(x) = 1\,000\,000\,000$;

б) $x + s(x) + s(s(x)) = 1993$;

в) $x + s(x) + s(s(x)) + s(s(s(x))) = 1993$.

976. Какое четырехзначное число в 83 раза больше своей суммы цифр?

96. Признак делимости на 11

Чтобы вывести признак делимости на 11, рассмотрим степени числа 10. Ситуация здесь чуть сложнее, чем была при выводе признаков делимости на 9:

$$10 = 10,$$

$$100 = 99 + 1,$$

$$1000 = 990 + 10,$$

$$10000 = 9999 + 1,$$

$$100000 = 99990 + 10,$$

$$1000000 = 999999 + 1.$$

Степени числа 10 при делении на 11 дают переменные остатки 10 и 1.

Признак делимости на 11. Целое число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа, стоящих на четных местах, и сумма цифр этого числа, стоящих на нечетных местах, дают одинаковые остатки при делении на 11.

Например, чтобы узнать, делится ли на 11 число \overline{abcde} , достаточно посчитать $a + c + e$ и $b + d$. Если получим числа, дающие (при делении на 11) один и тот же остаток, то число \overline{abcde} делится на 11, а если разные, то не делится. Как доказать признак делимости? Очень просто (для удобства обозначения рассматриваем пятизначное число):

$$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e =$$

$$= 9999a + a + 990b + 10b + 99c + c + 10d + e =$$

$$= 9999a + 990b + 99c + a + c + e + 11b - b + 11d - d.$$

Поскольку все числа $9999a$, $990b$, $99c$, $11b$ и $11d$ делятся на 11, все определяется величиной $a + c + e - b - d$.

977. Придумайте число, делящееся на 11, в записи которого использованы все десять цифр по одному разу.

978. Петя заменил в примере на умножение $AB \cdot BC = DDE$ одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. Докажите, что он ошибся.

979. Заметьте: числа вида \overline{aa} , \overline{abcabc} , $\overline{abcdeabcde}$ делятся на 11. Объясните, почему, если к произвольному числу, в котором нечетное количество цифр, приписать его же, то получится число, делящееся на 11.

980. Если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то полученное число без остатка делится на 11: например, числа вида \overline{aa} , \overline{abba} , \overline{abccba} делятся на 11. Докажите это.

97. Когда до полного числа десятков...

981. Когда до полного числа десятков не хватило 2 яиц, их пересчитали дюжинами. Осталось 8 яиц. Сколько было яиц, если их было больше 300, но меньше 400?

982. Когда солдаты строились в колонну по 4, 5 или по 6, каждый раз один оставался лишним, а когда построились в колонну по 7, лишних не осталось. Сколько было солдат?

Решение. Обозначим число солдат через $x + 1$. Тогда x делится на 4, 5 и 6, т.е. x делится на 60. Числа 61, 121, 181, 241 на 7 не делятся.

Ответ: $301 + 7 \cdot 60n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

983. Двенадцать бандитов напали на Буратино и отобрали у него все богатство – почти 30000 золотых монет. Стали они делить деньги поровну, но один золотой оказался лишним. Бандиты передрались из-за того, кому достанется лишний золотой, и ненадолго одного убили. Оставшиеся 11 бандитов стали опять делить богатство поровну, но все повторилось: один золотой оказался лишним, бандиты передрались, одного убили, опять стали делить богатство поровну, один золотой оказался лишним, и так далее. Когда в живых осталось шестеро бандитов, самый умный из них, который все время стоял в стороне и думал, сказал: «Стойте! Дальше все снова будет так же! Отдадим лучше один золотой Буратино, чтобы о нас не говорили, что мы отбираем все подчистую, а остальное разделим поровну». Его сообщники удивились, но в конце концов согласились с этим предложением. а) Прав ли был умный бандит? б) Сколько золотых было у Буратино?

984. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, а в другом – 18. Какое число было делителем?

985. При каких натуральных n дробь $(3n + 4)/5$ является целым числом?

Указание. Если $3n + 4 = 5k$, то $3(n + 3) = 5(k + 1)$. Поэтому $n + 3$ должно делиться на 5.

98. И снова ребусы

Отправился логик в темный лес и утешал себя тем, что перед ним два выхода: либо он заблудится, либо нет. Заблудился. Ну что ж, думал он, все равно впереди два выхода: либо провалюсь в яму, либо нет. Провалился. Падая вниз, успел подумать, что впереди все равно два выхода: либо сверну себе шею, либо нет. Свернул. Далее он размышлял о том, что и там его ждут два выхода: либо ад, либо рай. Попал он в ад. И снова подумал, что перед ним все еще два выхода: либо съест его черт, либо нет. Съел. И вот тогда остался у него только один выход ...

Если в арифметическом равенстве разные цифры заменить разными буквами, а одинаковые одинаковыми, то получится ребус. Решать его – восстанавливать цифры – можно разными способами. Легче всего попросить компьютер перебрать все варианты. Но этот способ бессмысленный: для того и составлены ребусы, чтобы решать их своей головой, находя способы перебирать не миллионы и не тысячи, а один-два варианта (впрочем, бывают ребусы, в которых самый быстрый способ решения – перебрать десяток вариантов).

986. Решите ребусы:

а)
$$\begin{array}{r} + \text{ КОКА} \\ \text{КОЛА} \\ \hline \text{ВОДА} \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} + \text{ КОЗА} \\ \text{КОЗА} \\ \hline \text{СТАДО} \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} + \text{ МАГНИЙ} \\ \text{ТАНТАЛ} \\ \hline \text{МЕТАЛЛЫ} \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} \text{ПОДАЙ} \\ - \text{ВОДА} \\ \hline \text{ПАША} \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} + \text{ БАЛЕТ} \\ \text{БАЛЕТ} \\ \hline \text{ТЕАТР} \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} + \text{ РЮМКА} \\ \text{РЮМКА} \\ \hline \text{АВАРИЯ} \end{array}$$

ж)
$$\begin{array}{r} + \text{ ДРАМА} \\ \text{ДРАМА} \\ \hline \text{ТЕАТР} \end{array}$$

з)
$$\begin{array}{r} \text{ЖАБА} \\ \text{ЖАБА} \\ + \text{ЖАБА} \\ \text{ЖАБА} \\ \hline \text{БАГАЖ} \end{array}$$

м)
$$\begin{array}{r} \text{КОШКА} \\ + \text{КОШКА} \\ \hline \text{КОШКА} \\ \text{СОБАКА} \end{array}$$

к) ВАГОН + ВАГОН ВАГОН <hr/> СОСТАВ	л) ДОСКА + ДОСКА ДОСКА <hr/> ЛОДКА	м) ЦВЕТOK + ЦВЕТOK ЦВЕТOK <hr/> БУКЕТИК
н) АТАКА + УДАР УДАР <hr/> НОКАУТ	о) ДОМНА + ДОМНА ДОМНА <hr/> ЗАВОД	п) ПАРУС ПАРУС + ПАРУС <hr/> ПАРУС <hr/> РЕГАТА
р) СЛОВО СЛОВО СЛОВО + СЛОВО СЛОВО СЛОВО СЛОВО <hr/> ФРАЗА	с) МЕ : НЕ = Е	т) БАРБОС + БОБИК <hr/> СОБАКИ
		у) ВОБЛА + ВОБЛА <hr/> ПЛОТВА

99. На дне озера быют ключи

987. На дне озера быют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов – за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

988 (И.Ньютон). 70 коров съели бы всю траву на лугу за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней ⁶⁰. Сколько коров съели бы траву за 96 дней?

989. Спускаясь по эскалатору, Миша наступил на 50 ступенек, а шагавший втрое быстрее Боря – на 75. Сколько ступенек на эскалаторе?

990. Отец и сын катались по кругу на катке. Время от времени отец обгонял сына. Когда сын стал двигаться по кругу в противоположном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бежит на коньках быстрее сына?

991*. В кинокамере и кинопроекторе проходит 8 кадров в секунду. На экране движется автомобиль с колесами, реальный диаметр которых 1 м. Изображения колес делают 2 оборота в секунду. Найдите скорость автомобиля, если она не превышает 150 км/ч.

⁶⁰ Не удивляйтесь: трава растет.

100. Относительное движение

...А что, если Пизанская башня, в сущности, правильно стоит, а это наша Земля со всеми нашими земными делами под ней скособочилась?

Ф.Искандер

992. Из Стерлитамака в Уфу с интервалом 10 минут выехали со скоростью 30 км/ч два поезда. С какой скоростью двигался поезд из Уфы, если он встретил эти поезда через 4 минуты один после другого?

993. Два поезда двигались навстречу друг другу по параллельным путям: один со скоростью 50 км/ч, а другой – со скоростью 70 км/ч. Пассажир второго поезда заметил, что первый поезд прошел мимо него за 6 секунд. Какова длина первого поезда?

994. От моста против течения реки поплыл спортсмен, а по течению – его мяч. Через 20 минут пловец вспомнил о мяче. Догнал он его в 2 км от моста. Какова скорость течения реки?

995. а) От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B , повернул обратно и встретил плот через 4 часа после выхода из A . Сколько времени катер шел от A до B ?

б) От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B , повернул обратно, встретил плот через 2 часа после выхода из A , затем доплыл до A , вновь повернул обратно и нагнал плот еще через 2 часа после того, как он его встретил. За какое время проплывет плот расстояние от A до B ?

996. От пристани одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся к пристани через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от пристани.

997. Два кита плыли рядом по прямой со скоростью 6 км/ч. В 9 часов 15 минут один из них увеличил скорость до 10 км/ч, через некоторое время внезапно повернулся и поплыл назад со скоростью 5 км/ч. Киты снова оказались рядом в 10 часов. Когда повернул первый кит?

998. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону. В момент, когда велосипедист и пешеход были в одном месте, мотоциклист отставал от них на 6 км. А когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист

обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода нагнал мотоциклист?

999*. Как-то раз в одном бассейне взад-вперед стали плавать два пловца. Первый проплывал из одного конца в другой за 11 минут, а второй – за полчаса. Начали они с одного и того же края бассейна. Кончили, когда опять оказались одновременно у одного края бассейна. Сколько за это время произошло обгонов?

1000*. Рассеянный шел домой вверх вдоль ручья со скоростью, в полтора раза большей скорости течения. Размышляя о чем-то, он бросил в ручей шляпу, но вскоре заметил ошибку, бросил в ручей палку и побежал назад с скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он схватил ее, повернулся и пошел вверх с первоначальной скоростью. Через 10 минут после этого он встретил плывущую по ручью палку. Насколько раньше он пришел бы домой, если бы не заметил ошибку?

Рефлексия

Сознание – это зажженные фары впереди идущего паровоза. Обратите их светом внутрь, и случится катастрофа.

Б.Пастернак

*У попа была собака,
Он ее любил,
Она съела кусок мяса,
Он ее убил.
В землю закопал, а
На могиле написал:
«У попа была собака,...»*

Все слышали нескончаемую историю о священнике и собаке. Это стихотворение интересно тем, что оно снова и снова возвращается к самому себе, подобно змее, заглатывающей собственный хвост.

Следующая фраза – типичный пример предложения, говорящего о себе самом. Пересчитайте буквы, и вы убедитесь, что это – чистая правда:

- В этой фразе двадцать восемь букв.

Вот другие примеры:

- Вы только что начали читать предложение, чтение которого вы уже заканчиваете.

- В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», че-

⁶¹ «Софизм» и «парадокс» – слова греческие. Софизм (σοφισμα) означает рассуждение, формально кажущееся совершенно безупречным, но содержащее на самом деле ошибку, в результате чего конечный вывод оказывается абсурдным. Одним из наиболее известных софизмов является следующий: «То, что ты не терял, ты имеешь; ты не терял рогов, следовательно, ты их имеешь».

В парадоксе (παράδοξος), наоборот, умозаключение, кажущееся неверным, противоречащим «здравому смыслу», на самом деле справедливо.

тырнадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».

- Only the fool would take trouble to verify that his sentence was composed of ten a's, three b's, four d's, forty-six e's, sixteen f's, four g's, thirteen h's, fifteen i's, two k's, nine l's, four m's, twenty-five n's, twenty-four o's, five p's, sixteen r's, forty-one s's, thirty-seven t's, ten u's, eight v's, eight w's, four x's, eleven y's, twenty-seven commas, twenty-three apostrophes, seven hyphens, and, last but not least, a single!

- In this sentence, the word *and* occurs twice, the word *eight* occurs twice, the word *four* occurs twice, the word *fourteen* occurs four times, the word *in* occurs twice, the word *occurs* occurs fourteen times, the word *sentence* occurs twice, the word *seven* occurs twice, the word *the* occurs fourteen times, the word *this* occurs twice, the word *times* occurs seven times, the word *twice* occurs eight times and the word *word* occurs fourteen times.

- Это предложение содержит двенадцать слов, двадцать шесть слогов и семьдесят три буквы.

- Когда за этим предложением не наблюдают, оно написано по-немецки.

- .иксбара-оп тюатич, овелан аварпс, кат оннемИ

- Девять слов назад это предложение еще не началось.

- Это предложение состояло бы из десяти слов, если бы оно было на пять слов короче.

- Если бы это предложение не существовало, кто-нибудь придумал бы его.

- Если бы я дописал это предложение,

- **Определение.** Душевнобольным называют душевнобольного, вступившего в конфликт с обществом. (*Из учебника психиатрии.*)

- Как выглядело бы это предложение, если бы π равнялось 3? ⁶²

- Где бы вы ни встретили это предложение, уничтожьте его.

⁶² Заметьте, в мире, где π действительно равно 3, вы сказали бы не «если бы $\pi = 3$ », а «если бы $\pi = 2$ » или «если бы $\pi \neq 3$ ». Впрочем, изменить π — значит глубочайшим образом изменить и всю математику, и весь мир. Пожалуй, ни понятие «предложение», ни «3» не выдержали бы такого потрясения.

• Этот принцип настолько всеобъемлющ, что никакое частное его применение невозможно.

• То, что я вам сейчас предсказываю, сбудется.

• Вы меня помните? Я – тот самый человек, который не произвел на Вас никакого впечатления.

• Почему все неприятности происходят в самое неподходящее время?

• Не напоминает ли это предложение о Пушкине?

• Представьте, что на последней, 500-й странице книги напечатано:

Опечатки

с. 500: Вместо «Опечатки» следует читать «Опечатка».

• *(Случай на экзамене.) Билет включал в себя следующее: «Напишите вопрос, подходящий для выпускного экзамена по этому курсу, а затем ответьте на него.»*

Для ответа достаточно дважды переписать этот вопрос!

• К переводу своей статьи Литлвуд написал примечания: Я весьма благодарен проф. Риссу за перевод этой статьи. Я также благодарю проф. Рисса за перевод последнего предложения.

Я также благодарю проф. Рисса за перевод последнего предложения.

Почему этот ряд благодарностей не нужно продолжать?

Самоотрицание

Плюрализм нужен нашей стране как воздух, и двух мнений об этом быть не может.

М. Горбачев ⁶³

• Лозунг «Короче!» сам следует тому, к чему призывает. А вот приказ «Не смей командовать!» противоречит сам себе.

• Самозванцев нам не надо: командиром буду я.

• Вообразите майку с надписью «На этой майке ничего не написано»?!

• Не противоречит ли само себе правило «Нет правил без исключения»?

• Не слушайся меня!

⁶³ М.С. Горбачев – Генеральный секретарь ЦК КПСС, разрушивший идеологию и практику коммунизма.

- Здес ровно три⁶⁴ ошибки.

- Как перевести на русский язык предложение «It's difficult to translate this English sentence into Russian»⁶⁵?

Наверно, так: «Это предложение трудно перевести с русского на английский».

- Я вынужден был перевести это предложение на русский язык, поскольку не сумел прочесть его в оригинале – на санскрите.

Парадокс лжеца

*Не зря ли знаньем бесполезным
свой дух дремотный мы тревожим?
В тех, кто заглядывает в бездну,
она заглядывает тоже.*

И.Губерман

- Еще в Древней Греции знали «парадокс лжеца». Представьте себе, что некто говорит: «Я лгу». Или представьте, что вы читаете в книге:

*То, что здесь написано, – неправда.*⁶⁶

- В одном полку брадобрею приказали брить всех тех, кто не бреется сам. Должен ли брадобрей брить сам себя?

- Может ли Всемогуший Бог создать камень, который он сам поднять не сможет?

- Что произойдет, если всесокрушающее пушечное ядро попадет в несокрушимую броню?

- Каждое натуральное число можно назвать, произнеся несколько слов. Например, число 2 задается одним словом, а число 22 – двумя.

Давайте рассмотрим *наименьшее число, которое нельзя задать меньше чем десятью словами.*

Как вы думаете, чему равно это число?

Его описание состоит всего из 9 слов, что противоречит его основному свойству.

⁶⁴ Слово «три» – ошибка или нет?

⁶⁵ Дословный перевод: «Трудно перевести это английское предложение на русский язык».

⁶⁶ Так что же тут написано? Если правда, то тогда – это неправда; а если неправда – то это правда!

Потешные истории

*Я спорю искренне и честно,
я чистой истины посредник,
и мне совсем не интересно,
что говорит мой собеседник.*

И.Губерман

• Крестьянин шел по дороге со своим сыном. Сын рассказывал что-то отцу и сказал ему неправду. Крестьянин догадался, что сын обманывает его. Тогда он сказал: «Сейчас, сынок, мы подходим к мосту. Этот мост не простой, а волшебный – он проваливается под теми, кто говорит неправду». Когда сын услышал это, он испугался и признался отцу, что обманул его. Хотите узнать, что было дальше? А дальше крестьянин со своим сыном вступили на мост, и мост провалился под крестьянином – *ведь никаких волшебных мостов на самом деле не бывает.*

• (Юридический казус.) Встретились в пустыне три путника. Двое, не сговариваясь, решили убить третьего. Ночью один из них отравил его воду, а другой (не зная о том!), проколол бурдюк с водой так, что вода вскорости вытекла и бедняга погиб от жажды.

Кто убийца? В суде второй утверждал, что благодаря нему третий прожил даже дольше, чем если бы он выпил отраву. А отравитель оправдывался тем, что весь яд вытек и никак не повредил жертве.

• При строительстве моста через Неву несколько тысяч человек были заняты бойкою свай, что, не говоря уже о расходах, чрезвычайно замедляло работы. Искусный строитель генерал Корбец выдумал машину, значительно облегчившую и ускорившую этот труд. Сделав опыты, описание машины он представил Главноуправляющему путей сообщения и получил на бумаге официальный и строжайший *выговор*: зачем он этой машины прежде не изобрел и тем ввел казну в огромные и напрасные расходы.

• Начальник зырянского узла связи Ляпунов пожаловался в милицию: «Джемилев нарушает правила ведения междугородних разговоров... Он утверждает, что мы подслушиваем его переговоры. Прошу разъяснить Джемилеву, что его действия носят оскорбительный характер, а подобные утверждения являются клеветой». В обоснование своей жалобы Ляпунов прилагает докладную телефонистки Пенягиной с изложением содержания разговора Джемилева. («Хроника текущих событий», 1980 г.)

— Вы знаете, который час? — спросил прохожий математика. — Знаю, — ответил тот и пошел своей дорогой.

Согласитесь, математик ответил на поставленный вопрос. Правда, прохожего на самом деле интересовало, сколько времени. С точки зрения строгого математика, прохожий спросил не то, что хотел.

Вот еще пример такого диалога:

Учитель: — Маша, твоя работа очень хорошая, но она точно такая же, как у Вовочки. Что я должен думать?

Машенька: — Что работа Вовочки тоже очень хорошая.

Не правда ли, Маша ответила учителю в лучших традициях логики? Пожалуй, ответы «Это он у меня списал» или «Не знаю, так случайно получилось» даже менее логичны!

Предлагаю вам завершить несколько анекдотических диалогов и затем сверить свои ответы с теми, что приведены на странице 278.

1) — Обвиняемый, почему Вы обманули людей, которые Вам так доверяли? — Потому что я не мог обмануть ...

2) — Дорогой, закрой форточку, на улице холодно! — А что, если я закрою форточку, на улице...

3) — Хотел бы я иметь столько денег, чтобы купить слона!
— А зачем тебе слон?

— Слон мне не нужен, мне ...

4) — Не волнуйтесь, больной! У меня самого была эта болезнь.

— Да, но у Вас был другой ...

5) — Сделайте мне пробор посередине, чтобы волосы разделились пополам.

— Не могу, ...

6) — Я так много читал о вреде никотина, алкоголя и наркотиков, что с нового года решил бросить.

— Пить или курить?

— Нет, ...

7) — Джон, больше не играй с Питером, он плохой мальчик!

— А я хороший?

— Да, милый, ты очень хороший! А играть надо только с теми, кто лучше, чтобы набираться от них ума-разума!

— Значит, он может ...

8) — Где ты был в воскресенье?

— Ловил карасей.

— Много поймал?

— Ни одного.

— А почему ты уверен, что ...

9) — Если Вы сейчас же дадите мне 500 долларов, Вы спасете жизнь достойнейшему человеку!

— Что-то Вы не похожи на достойного человека!

— Вы спасете ...

10) — Сколько стоят эти телевизоры?

— Вот этот — 4000 рублей, а тот — 5600.

— Какая между ними разница?

— ...

11) — Есть только один честный способ заработать миллион, — говорит один миллионер другому.

— Какой же?

— Я так и думал, что ...

12) — В какой гостинице лучше остановиться в этом городке?

— В отеле «Бэсчагда».

— Почему ты так уверен? Ты останавливался в «Бэсчагде»?

— Нет, я ...

13) — Вы подали кофе или чай? — спрашивает посетитель ресторана официанта.

— А что, не можете различить?

— Да, не могу.

— В таком случае ...

14) — Почему Вы все время опаздываете?

— Видите у лифта табличку «Только на 10 человек?». каждое утро я ...

15) — Есть приспособление, которое позволяет видеть сквозь стену!

— Не может быть! Что же это такое?

— ...

16) — К вам доставляют потерянные вещи? — спрашивает проситель в бюро находок.

— Нет, только ...

17) — Почему вокзал так далеко от города? — спрашивает приезжий у белоречанина.

— Чтобы он ...

18) — Ремонт обуви стоит 10 рублей, но так как один ботинок мы потеряли, то ...

19) — Если бы не усы, ты был бы очень похож на Васю!

— Но у меня нет усов!

— ...

20) — Как-то раз я на вечеринке на спор съел 30 бутербродов.

— И без последствий?

— Нет, с тех пор ...

21) — Я целую ночь не спал, — говорит постоялец гостиницы, — ловил клопов.

— А что, они хотели ...

22) — Каких Вам сардин — португальских, испанских, французских?

— Какая разница! Я же не собираюсь ...

23) — Что с тобой, ты весь забинтован!

— Столкнулся с летающей тарелкой!

— Что ты говоришь! Где же это случилось?

— ...

24) — Поднажми, Вилли, — говорит один наездник другому. — А то я ...

Наступило утро, и городские ворота со скрипом распахнулись. Караваны, груженные драгоценными индийскими тканями, прекрасной медной и серебряной посудой, хорасанскими коврами и другими товарами, двинулись в Бухару.

Вслед за караваном богатого багдадского купца в ворота въехала и арба дехканина Али. На арбе сидели двое: хозяин и Ходжа Насреддин, недавно выручивший Али из неприятной истории с поливом посевов. В благодарность за помощь Али чуть не силой уговорил Насреддина принять от него часть урожая, и теперь они вместе везли арбузы на базар: 104 арбуза Али и 17 – Насреддин.

– Стойте! – закричал стражник, и арба остановилась. – По какому делу едете в благородную Бухару? Чем торгуете? Почему не заплатили деловую пошлину? Вижу, у вас тут арбузы? Сейчас же платите арбузную пошлину! Арба скрипит, словно ее не смазывали целый год! Платите пошлину за скрип! Поворачивайте оглобли! Просто так мы не пустим непонятно кого!

– Мы... – начал Али.

– Так уж и быть, – не давая ответить, продолжил стражник, – вижу, деньги у вас вряд ли найдутся. Чего уж по доброте не сделаешь, помогу вам. Платите пошлину арбузами!

Чуть поторговавшись, стражник и Насреддин пришли к соглашению:

– Значит, я должен тебе 3 арбуза и 1 таньга, – сказал Насреддин. – Правда, у меня нет ни одной монеты... Но мой друг Али должен 19 арбузов без 1 таньга. Значит, если мы дадим 22 арбуза, то будем в расчете! По рукам?

– Эх, чего только по доброте не сделаешь! Ограничимся арбузной пошлиной! Все равно больше с вас ничего не возьмешь! – проворчал стражник. – Разгружайте арбузы, так уж и быть!

Вечером, распродав товар, Ходжа и Али зашли в чайхану. Пузатый чайханщик принес каждому по чайнику и поставил

на столик пиалы. И не успели они и два часа посидеть, как к ним подсел бородатый старик очень важного вида. Присмотревшись, Насреддин узнал его: это был знаменитый звездочет и мудрец Гуссейн Гуслия, главный математик эмира бухарского. К старости он стал слаб глазами и не узнал Насреддина, доставившего ему в свое время немало хлопот.

«Сейчас я поражу мудростью этих невежественных людей, — думал Гуссейн, — они расскажут другим, слух дойдет до эмира, и он станет ценить мою ученость еще больше».

— Я слышал ваш разговор со стражниками у бухарских ворот, — начал он, поглаживая длинную бороду, — хотя и не расслышал, сколько стоят арбузы и какова пошлина за провоз арбуза в город. Но я — великий ученый, я знаю наизусть великую книгу Аль-Хорезми «Аль-джебр альмукабала», полную мудрости Аллаха и недоступную невежественным умам. Я могу назвать цену арбуза, не ходя на базар и никого не спрашивая!

— Что ж, назови, — сказал Ходжа Насреддин.

— 11 таньга! — провозгласил звездочет. — Я великий мудрец эмира, Гуссейн Гуслия, вы должны признать мою несравненную ученость...

— Не угадал, о великий Гуссейн Гуслия, — перебил его Насреддин.

— Как это «не угадал»! — возмутился старик. — Ты, конечно, ничего не поймешь, но я все равно скажу. Слушай: если арбуз стоит x таньга, а за его провоз берут y таньга, то цена 19 арбузов на 1 таньга больше, чем налог, который Али уплатил за свои 104 арбуза:

$$19x = 104y + 1.$$

А ты за свои 17 арбузов отдал 3 арбуза, заплатив меньше, чем надо было, на 1 таньга:

$$3x = 17y - 1.$$

Теперь, пользуясь наукой несравненного Аль-Хорезми, углубляться в которую нет нужды, ибо ее могут понять только истинные мудрецы, я умножаю первое уравнение на 3, второе на 19 и получаю:

$$3(104y + 1) = 3 \cdot 19x = 19 \cdot 3x = 19(17y - 1),$$

$$312y + 3 = 323y - 19,$$

$$11y = 22,$$

$$y = 2,$$

$$3x = 17 \cdot 2 - 1,$$

$$x = 11.$$

Гуссейн Гуслия размахивал пергаментом с расчетами, презрительно поглядывая на Насреддина.

— Мудрость твоя велика, — ответил Ходжа Насреддин. — Но, как сказал один умный человек, математика — это мельница, которая перемалывает то, что кладут на ее жернова. А ты вместо зерна бросил семена полыни, и доброй муки у тебя не вышло.

— Как это? — возмутился звездочет. — Как можешь ты судить о верности моего решения, ты, не знающий наизусть стихи Корана? Ты всего лишь дехканин, подобный невежеством своему ишаку!

— Скажи мне, о Гуссейн Гуслия, — ответил Насреддин, — зачем Али платить пошлину за те 19 арбузов, которые он отдал стражникам? Ведь их-то он не повез на базар! И я не обязан платить за 3 арбуза! Так что

$$\begin{cases} 19x = (104 - 19)y + 1, \\ 3x = (17 - 3)y - 1. \end{cases}$$

Теперь ты можешь привлечь ту достойную восхищению науку, в которой, как ты думаешь, тебе нет равных, и убедиться, что арбуз стоит 9 таньга.

Гуссейн Гуслия погрузился в размышления и обнаружил, что незнакомец прав.

— Возможно, я и погорячился, — неохотно признал он. — Должен сказать, что твои рассуждения достойны самого Ходжи Насреддина. И твое нахальство тоже. Это же надо — заплатить налог не со всего товара, а только с того, что останется после того, как налог будет заплачен!

Чайханщик схватился за живот, тихо постанывая: «Ой, умру!» Захохотал Али. Гуссейн Гуслия некоторое время смотрел на них с недоумением, потом запричитал:

— Так это ты снова явился в Бухару, чтобы посмеяться над моими седидами! Чтоб тебя забрал шайтан, чтоб тебе не знать покоя на том и этом свете, чтоб...

— Да нет, почтенный, — смиренно ответил Ходжа Насреддин. — Я всего лишь приехал продать арбузы.

Дехканин Али скромно слушал беседу ученого звездочета Гуссейна Гуслия и хитроумного Ходжи Насреддина. Когда звездочет, раздосадованный тем, что ему опять не удалось посрамить собеседника, на пару секунд замолчал, устав взывать к Аллаху и проклинать свою несчастную судьбу, Али осторожно и почтительно вмешался в разговор.

— Извините меня, о достопочтенные, — сказал он, — но мне вспомнилась одна старинная история, в которой мне далеко не все ясно. Не могли бы вы удовлетворить мое любопытство и объяснить ее смысл?

Гуссейн Гуслия воспрял духом и приосанился:

— Говори, — ответил он. «Сейчас я наконец одержу верх над тобой, Насреддин!» — думал он, надеясь, что задача окажется слишком сложной для Ходжи Насреддина, а великий Гуссейн Гуслия решит ее — ведь в науках ему нет равных.

— Рассказывают, — начал Али, — что знаменитый Али-Баба нашел некогда пещеру, в которой разбойники хранили награбленные сокровища.

— Он подслушал волшебные слова, которые отпирали пещеру, — перебил рассказчика Гуссейн Гуслия. — Я знаю эти волшебные слова. Следовало сказать: «Сезам, откройся!» и двери распахивались.

— Именно так, о великий Гуссейн, — ответил Али, — но загадка, которую в нашей семье передавали из поколения в поколение, впереди. Историю об Али-Бабе и сорока разбойниках передавали из уст в уста многие люди. И прежде чем она достигла слуха Шехерезады — столь же прекрасной, сколь и умной женщины, — некоторые детали рассказа были утрачены. Одних слов «Сезам, откройся!» было недостаточно. Была еще волшебная бочка.

— Какая еще бочка? — скривился Гуссейн Гуслия. — Мне кажется, ты пытаешься исказить сказку Шехерезады, вставив в нее отсебятину.

— Да нет, о великий Гуссейн, там действительно была бочка с четырьмя кувшинами для сельди, — поддержал друга Ходжа Насреддин.

— Да, была, — повторил Али и пояснил:

— Я — троюродный племянник внучатой племянницы Али-Бабы. Поэтому в нашей семье эту историю всегда передавали без пропусков, не гонясь за красотами слога, но следя за неизменностью смысла — именно в том виде, как сам Али-Баба рассказывал ее своим внукам.

— Ну, рассказывай, — позволил Гуссейн Гуслия.

Али закрыл глаза, чтобы ничто не отвлекало его внимания, и заговорил нараспев:

— ... И когда я подошел к горе, в которой хранились сокровища, и произнес волшебные слова, и ничего не случилось, вспомнил я, что перед тем, как воззвать к Сезаму, атаман разбойников что-то делал с обыкновенной деревянной бочкой — да, именно с обыкновенной бочкой, в каких привозят из дальних стран свои вина гяуры, не признающие наших бурдюков, столь же удобных, сколь и угодных Аллаху. Бочка была закрыта плотно пригнанной крышкой, но в крышке оказались четыре круглых отверстия, расположенные квадратом. Я внимательно осмотрел бочку, но более ничего не нашел. Тогда, призвав на помощь Аллаха, опустил я руки в два из отверстий и нащупал каждой рукой по кувшину, из горлышек которых торчали рыбы, размерами и формой — сельди. Вытащив одну из них, я убедился, что это действительно превосходная каспийская сельдь, хорошо просоленная и жирная. Тут раздался шум и лязг — разбойники возвращались, что-то забыв в пещере.

Ходжа Насреддин осторожно тронул Али за плечо.

— Послушай, друг, уже взошла луна, а мне хотелось бы выпаться. Не мог бы ты подхлестнуть верблюдов своего повествования, дабы они скорее добрались до оазиса истины?

Али открыл глаза и некоторое время с недоумением оглядывался, как человек, позабывший, где он находится.

— Простите, — сказал он, — я несколько увлекся. Итак, мой предок вновь спрятался за деревом и увидел, как разбойники подъехали к пещере. Атаман подошел к бочке и засунул в нее обе руки. Но, как помните, одной селедки не хватало — ведь Али-Баба ее вытащил и не успел положить назад.

Атаман рассвирепел, стал обвинять своих разбойников в воровстве и в запальчивости крикнул: «Как можно было сожрать селедку, о негодные! Они же отпирают пещеру!» Тут, как вы понимаете, Али-Баба весь обратился в слух. «Волшебные слова срабатывают, — бушевал атаман, — лишь если четыре селедки во всех четырех кувшинах направлены хвостами в одну сторону!» Разбойники клялись, что не трогали

рыбу. Атаман приказал достать недостающую селедку где угодно, и разбойники ускакали, продолжая браниться и обвинять друг друга в воровстве. Али-Баба подбежал к пещере и вложил в пустой кувшин свою рыбину. Раздался тот самый скрип и грохот, какой он слышал раньше, когда разбойники заходили в пещеру. Бочка бешено вертелась, а когда остановилась, невозможно было определить, в какое отверстие только что была вложена селедка. Тут только Али-Баба обратил внимание, что бочка идеально круглая и отверстия расположены идеально симметрично.

И вот мы подошли к загадке. Али-Баба никогда не рассказывал, как ему удалось открыть дверь. Он говорил лишь, что несколько раз засовывал руки в бочку и поворачивал рыб то так, то эдак, после каждого опыта взывая к Сезаму. Как известно, в конце концов пещера открылась, Али-Баба побывал в ней и вынес часть сокровищ, которых хватило на долгую безбедную жизнь. Объясните мне, как Али-Баба мог справиться со столь хитроумной задачей?

— С какой задачей? — пытаюсь выиграть время, спросил звездочет. — Ты говорил долго и напыщенно, так что к концу немудрено и забыть, что было в начале.

— Коротко говоря, — вмешался Ходжа Насреддин, — перед Али-Бабой была круглая бочка с кувшинами в вершинах квадрата. В каждом кувшине — селедка головой вниз или вверх. Али-Баба может сунуть руки в любые два кувшина, ощупать селедки и повернуть их по своему желанию. После этого бочка начинает очень быстро вращаться, так что после остановки невозможно определить, на какой угол она повернулась. Али-Баба может вновь сунуть руки в кувшины, пощупать и, если захочет, перевернуть селедки, потом вынуть руки, бочка опять завертится... Как только селедки окажутся направлены одинаково (все головами вверх или все — вниз), откроется вход в пещеру.

— Та-ак... — протянул Гуссейн Гуслия, оглаживая бороду. — Если засунуть руки в какие-то два отверстия по диагонали квадрата, можно повернуть селедки на этой диагонали головами вверх. Потом засовываем руки в отверстия вдоль какой-то стороны квадрата и, если нужно, поворачиваем одну из селедок так, чтобы они были головами вверх. Если дверь не открылась, то нужно перевернуть еще одну селедку — ведь три селедки из четырех уже повернуты головами вверх!

— И как же ты ее определишь? — поинтересовался Ходжа Насреддин.

— Буду совать руки то так, то эдак, моля Аллаха о снисхождении, — не очень уверенно ответил Гуссейн Гуслия.
— Рано или поздно я ухвачу за хвост ту единственную селедку, которая лежит неправильно!..

— Ну, если тебе понадобится помощь Аллаха, — заметил Ходжа Насреддин, — молись и о том, чтобы разбойники не вернулись прежде, чем ты ухватишь нужную рыбу за хвост! Аллах велик, но он иной раз медлит, надеясь, что разумный обойдется без его помощи, — у Аллаха хватает хлопот и с неразумными.

— погоди, нечестивый! — воскликнул старый звездочет.
— Мне стоит удалиться и поразмыслить. Я уже решил задачу на три четверти. Думаю, к утру разберусь с оставшейся мелочью и сообщу вам разгадку — расскажу, как повернуть все селедки вверх головами.

— Боюсь, — сказал Али, — что это не так просто. Ведь бочка — а это не простая бочка, а волшебная, — может никогда не дать Али-Бабе эту одну селедку. Куда бы он ни засовывал руки, бочка может предугадывать его действия и так поворачиваться, чтобы он никогда ни разу не ухватил проклятую селедку за хвост.

Ходжа Насреддин лениво зевнул.

— Зачем ждать утра, о мудрый Гуссейн Гуслия? Если позволишь, я расскажу, что мог сделать Али-Баба.

Смотри: ты разобрался, как повернуть три селедки вверх головами. Но нам не нужно, чтобы все они обязательно смотрели на звезды, правильно? Засунь руки в диагональные отверстия. Если одна из селедок хвостом вверх, ты повернешь ее хвостом вниз и откроешь дверь. Если же они обе головами вверх, то переверни одну из них. Теперь на одной стороне квадрата две селедки смотрят в небо, а на другой — в грешную землю.

— Это ничего не даст, — проворчал Гуссейн Гуслия. — Нужно перевернуть две из них. Это вдвое труднее, чем одну!

— Немного терпения, уважаемый, немного терпения. Теперь сунем руки по стороне квадрата.

— Если обе селедки смотрят вверх, — поторопился сказать Гуссейн Гуслия, — то я переворачиваю их — и дверь открыта. И если обе эти селедки хвостами вверх — то и тогда я могу решить задачу, перевернув их. Просто селедки будут все четыре — головами вниз.

— Но что делать, о великий Гуссейн Гуслия, — спросил Али, — если селедки смотрят в разные стороны?

— Надо подумать, — ответил звездочет. — Непонятно, какую из них переворачивать. Наверное, надо повернуть их головами к небу. Не к земле же!

— Нет, ты не угадал, — ответил Ходжа Насреддин. — Али-Баба как раз и столкнулся с этой неприятностью. Он перевернул обе селедки!

— Зачем? — удивился Гуссейн Гуслия. — Так можно только запутаться в этих поворотах!

— Ничуть не бывало! — торжествовал Ходжа. — Теперь по диагоналям селедки расположены одинаково! В двух противоположных углах они вверх, а в двух других — вниз.

— Да, я понял! — обрадовался Али. — Осталось сунуть руки по диагонали, перевернуть селедки, как бы они ни лежали — хвостами вверх или хвостами вниз — и дверь откроется!

Гуссейн Гуслия чуть не плакал. Опять неудача!

— Не расстраивайся, — сказал ему Насреддин. — Если бы я был на месте Али-Бабы, я куда быстрее решил бы эту задачу.

— Уж куда быстрее, — всхлипнул старик. — Позор, позор на мою седую голову!.. А как?

— Я вытащил бы все селедки. Если Али не ошибся, пересказывая нам эту историю, без одной селедки бочка не крутилась, ведь так? Значит, можно засунуть все рыбы в их кувшины. Разумеется, головами вверх. И когда последняя рыба окажется на месте, останется сказать: «Сезам, откройся!»

— погоди, Насреддин, — возразил Али. — Наверное, рыбу нельзя было вынимать, иначе задача действительно становится слишком простой.

— Тогда в следующий раз, рассказывая свое семейное предание, припоминай его точнее, ничего не приукрашивая!

Али сильно смутился.

— Честно говоря, Али-Баба — не столь близкий мой родственник, как я вам сказал. И эту историю я слышал не дома, а в нашей чайхане...

Пожелав друг другу доброго сна, собеседники расстались. Насреддин и Али завалились на кошму, любезно предоставленную чайханщиком. А великий мудрец, звездочет и математик Гуссейн Гуслия отправился в свои покои в эмирском дворце, где и проворочался всю ночь. Подозрение терзало его: уж не от Ходжи ли Насреддина услышал Али о селедках?

ТЕСТ ДЛЯ ШЕСТИКЛАССНИКА

1. Вычислите:
$$\frac{3,75:1\frac{1}{2} + \left(1,5:3\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{2} + \left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5} + \left(3\frac{1}{4}:13\right) : \frac{2}{3} - \left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65}}.$$

2. Во сколько раз километр длиннее миллиметра?

3. Во сколько раз 5% от числа 5 меньше, чем 50% от числа 50?

4. Огурцы содержали 99% воды. Часть ее испарилась, так что в огурцах стало 98% воды. Какую часть веса потеряли огурцы?

5. Купец на 540 рублей купил 138 аршин сукна (черного и синего). Сколько купил он черного сукна и сколько синего, если синее стоило 5 рублей за аршин, а черное – 3 рубля?

6. В одной урне лежали 2 белых шара, в другой – 2 черных, в третьей – один белый и один черный. На каждой урне висела табличка, указывавшая ее содержимое: «ББ», «ЧЧ», «БЧ». Шутник перевесил таблички так, что теперь все надписи неверны. Как, вынув один шар, определить, что где находится?

7. Бактерии размножаются делением пополам со скоростью 1 деление в минуту. Если посадить в сосуд с питательной смесью 1 бактерию, то через час он заполнится бактериями. Через какое время была заполнена половина сосуда? А через какое время заполнился бы сосуд, если бы в начале в нем было две бактерии?

8. Олимпиада, Сосипатра и Поликсена пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Сколько каждая выпила чашек и у кого какое отчество, если Карповна выпила 11 чашек, Уваровна пила вприкуску, а количество выпитых Титовной чашек кратно трем?

9. Найдите три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему, как $0,5 : \frac{9}{20}$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

10. Когда из первого бидона перелили во второй 12,5% находившегося в первом бидоне молока, то в обоих бидонах молока стало поровну. Сколько литров молока было во втором бидоне, если всего молока 70 литров?

11. Порция сливочного мороженого стоит 250 рублей, а порция шоколадного – 450 рублей. Все имевшееся мороженое раскупили 61 человек, каждый из которых купил либо одно сливочное, либо одно

шоколадное, либо одно сливочное и одно шоколадное. Выручка составила 17000 рублей. Сколько порций шоколадного мороженого было продано?

12. Решите уравнение

$$3,8 + (4,5y - 0,8) = \left(1\frac{2}{5} + 3,5 : 1\frac{1}{4}\right) : 2\frac{2}{5} + 3,4 : 2\frac{1}{8} + 2,4y - 0,35 + 1,5y.$$

13. За круглым столом сидели 12 человек: астрономы и астрологи. Астрономы всегда говорят правду, а астрологи – не всегда. Сколько астрономов за столом, если каждый из сидевших за столом мог заявить, что один из его соседей – астроном, а другой – астролог?

14. Первая слева цифра десятизначного числа равна числу единиц в записи этого числа, вторая – числу двоек, третья – числу троек, четвертая – числу четверок, ..., девятая – числу девяток, десятая – числу нулей. Придумайте такое число.

15. Поставьте вместо многоточий числа, чтобы получилось истинное высказывание:

В этом предложении цифра 0 встречается ... раз, цифра 1 – ... раз, 2 – ... раз, 3 – ... раз, 4 – ... раз, 5 – ... раз, 6 – ... раз, 7 – ... раз, 8 – ... раз, 9 – ... раз.

16. В магазин поступили учебники по астрологии и политологии. Когда продали 50% учебников политологии и 20% – астрологии, что составило в общей сложности 390 книг, учебников политологии осталось в 3 раза больше, чем астрологии. Сколько учебников политологии поступило в продажу?

17. Турист проехал на поезде и на теплоходе 605 км. Скорость поезда – 60 км/ч. Скорость теплохода – 25 км/ч. Сколько времени турист ехал на поезде и сколько – на теплоходе, если известно, что на теплоходе он ехал на 3 часа меньше, чем на поезде?

18. Предприятие «Миксер» получает яблочный и виноградный сок в бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в банках. Раньше одного бидона яблочного сока хватало ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного – ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватает теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется. Все бидоны одинаковые.)

19. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объема, во втором бидоне вода заняла $\frac{2}{3}$ его объема, а в третьем – $\frac{3}{4}$. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком минимальном объеме бака возможна такая ситуация?

20. Может ли пересечение треугольника и четырехугольника быть восьмиугольником?

ТЕСТ ДЛЯ СЕМИКЛАССНИКА

1. В стране три города: Правдин, Лгунов и Переменск. Жители Правдина всегда говорят правду, Лгунова – лгут, а жители Переменска строго попеременно лгут и говорят правду. Пожарным позвонили:

- У нас пожар!
- Где горит?
- В Переменске.

Куда ехать пожарным? (Подразумевается, что пожар действительно случился и куда-нибудь ехать пожарные должны.)

2. Один мастер ставит на длинной ленте метки от ее начала через каждые 36 см, другой – через 25 см. Могут ли две метки оказаться на расстоянии 1 см друг от друга?

3. Как контейнерами массами 130 кг и 160 кг полностью загрузить грузовик грузоподъемностью 3 тонны?

4. Поезд проходит⁶⁷ мост длиной 450 метров за минуту и полминуты идет мимо телеграфного столба. Найдите длину и скорость поезда.

5. Ученику на контрольной дали 20 задач. За каждую верно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную – минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать, – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он пытался решить?

6. Когда Коля был молод, как Оля, годом меньше было тетушке Поле, чем Коле теперь вместе с Олей. Сколько лет было Коле, когда тетушка Поля была в возрасте Коли?

7. Сколькими нулями оканчивается число

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100?$$

8. По кругу стоят 20 корзин. Можно ли разложить в них 99 арбузов так, чтобы количества арбузов в любых двух соседних корзинах отличались ровно на 1?

9. В турнире участвуют 15 шахматистов. Мог ли к некоторому моменту каждый из них сыграть ровно по 7 партий?

10. В строке 20 целых чисел. Сумма любых трех последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательной?

⁶⁷ Считая с момента, когда поезд начал въезжать на мост, до момента, когда он целиком съехал с него.

11. Один человек выпьет кадь пития за 14 дней, а вместе с женою – за 10 дней. За сколько дней жена выпьет ту же кадь?⁶⁸

12. За десять дней пират Ерема способен выпить бочку рома, а у пиратушки Емели ушло 6 на это две недели. За сколько дней прикончат ром пираты, действуя вдвоем?

13. а) В коробке карандаши не все одной длины и не все одного цвета. Докажите, что в этой коробке есть два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине. б) В магазин привезли платья трех цветов и трех фасонов. Можно ли выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и фасоны?

14. Земной шар по экватору плотно обтянули веревкой. Ее длину увеличили на 1 метр. Образовавшийся зазор равномерно распределили по экватору. Сможет ли в него прошмыгнуть мышь?

15. По олимпийской системе (проигравший выбывает) соревнуются 50 боксеров. Сколько боев надо провести для выявления победителя?

16. Плитка шоколада состоит из отдельных долек, образующих 4 вертикальных ряда и 6 горизонтальных. За какое наименьшее число разломов ее можно разломать на отдельные дольки, если всякий раз ломать разрешается лишь 1 кусок?

17. а) Цены снижены на 20%. На сколько процентов больше товара можно купить на ту же зарплату?

б) Тот же вопрос, если цены три раза подряд снижали (каждый раз на 20%).

18. Первый разбойник взял 100 рублей и десятую часть оставшейся добычи, второй взял 200 рублей и десятую часть остатка, третий – 300 рублей и десятую часть остатка, и так далее. Оказалось, что добычу поделили поровну. Сколько разбойников и какова добыча?

19. У одного араба был кувшин молока, у другого – хлеб, у третьего – 6 фиников. За обед третий араб заплатил остальным 20 монет. Как следует разделить эти деньги, если ели поровну, 4 кувшина молока стоят столько же, сколько 3 хлеба, а один кувшин молока равноценен 36 финикам?

20. Задержанный признался, что у него три сына, произведение их возрастов равно 36, а сумма равна числу окон дома, около которого произошло задержание. Милиционер сказал, что для определения возраста детей этого недостаточно. Когда задержанный добавил, что его старший сын рыжий, милиционер определил возрасты детей. Сколько им было лет?

21. Простак и Хитрец спускались на эскалаторе. Посередине Хитрец сорвал с Простака шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Простак побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься и вернуть шапку, а Хитрец вниз, чтобы потом подняться

⁶⁸ Эта задача – из «Арифметики» Л.Ф.Магницкого.

вверх и опередить Простака. Кто первый схватит шапку, если скорости их относительно эскалатора одинаковы, постоянны и не зависят от направления движения?

22. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть а) меньше 0,1; б) больше 1101?

23. Поместите в квадрат 1×1 несколько непересекающихся кругов, сумма радиусов которых больше 1101.

24. Сколькими способами можно расставить 8 неотличимых друг от друга ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга?

25. Как быстрее: проехать паромом по реке туда и обратно или по озеру то же расстояние туда и обратно?⁶⁹

26. Пароход шел от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

27. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу, и первый приехал туда, откуда выехал второй, через 16, а второй – через 25 часов после встречи. Сколько часов ехал каждый автомобиль?

28. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом через час. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются каждые полчаса. За какое время проезжает кольцевую дорогу каждый автомобиль?

29. Инженер ежедневно выходил из дома в одно и то же время, и в это время за ним подъезжала машина, на которой он ехал на завод. Однажды он вышел на час раньше обычного, сразу пошел навстречу машине и прибыл на завод на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость инженера меньше скорости машины?

30. Найдите такие точки на земном шаре, что если пройти 10 км на юг, 10 км на восток и 10 км на север, то вернемся в исходную точку.

Предупреждение. Конечно, если мы выйдем из точки, удаленной от Южного полюса на 10 км, то сначала придем на полюс, потом 10 км протопчемся на месте, а затем пройдем 10 км, возвращаясь в начало маршрута. Но можно ли считать, что наше топтание на месте было направлено на восток? Ведь и на запад мы двигались бы точно так же – стоя на месте!

31. Если n целое, то а) $n^2 - n$ делится на 2; б) $n^3 - n$ делится на 6; в) $n^3 + 5n$ делится на 6. Докажите это.

32. У царя Гвидона было 5 сыновей. Из остальных его потомков 15 имели по три сына (и ни одной дочери), а остальные умерли бездетными. Сколько всего было потомков у Гвидона?

⁶⁹ *Подсказка.* Если скорость парохода равна скорости течения реки, то ...

33. Ивану Александровичу Хлестакову прислали за 3 дня 35000 курьеров. Если бы в первый день прислали вдвое больше курьеров, чем на самом деле, то общее число курьеров было бы пятой степенью того числа, на которое в третий день прислали курьеров больше, чем во второй. Сколько курьеров присылали каждый день?

34. Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг, на 7 трехтонках?

35. Масса нескольких ящиков вместе 10 тонн, причем масса каждого не больше 1 тонны. Сколько трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти весь груз?

36. На доске были написаны четыре числа. Их сложили всевозможными способами по два и получили следующие суммы: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Какие числа были на доске?

37. Класс построен в виде прямоугольника. В каждом ряду выбран самый высокий, в каждой шеренге – самый низкий. Кто выше: самый высокий из низких или самый низкий из высоких?

38. Если m, n – натуральные числа, то первые mn натуральных чисел разбить на n групп по m чисел в каждой таким образом, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми,

а) можно, если m четно;

б) нельзя, если m нечетно, а n четно;

в) можно, если m и n нечетны, причем $m > 1$.

Докажите это.

39. Вычислите:

1999

$$19971999^2 - 19972000 \cdot 19971998$$

40. На доске 6×6 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялись закрашенные уголки из трех клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.⁷⁰ У кого из игроков есть выигрышная позиция

41. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, чтобы они не налегали друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

42. Двойными шахматами назовем игру, отличающуюся от обычных шахмат только тем, что каждый из противников может делать 2 хода подряд. Докажите, что белые могут выиграть или добиться ничьей.

43. На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Тот, после хода которого король окажется на поле, где король уже побывал, выигрывает. Запрещено

⁷⁰ В уголок могут входить клетки, закрашенные любым из игроков. Иными словами, надо представлять себе, что карандаши у них одного цвета.

возвращать короля на поле, где он был только что (т.е. перед последним ходом противника). Кто выиграет в такой игре, если оба играют наилучшим образом?

44. Даруя народу конституцию, царь организовал несколько партий среди n своих подданных. (Любого подданного можно зачислить в несколько партий или не зачислять ни в одну из них.) Однажды советник по национальной безопасности принес царю список врагов народа. По конституции царь может выбрать несколько партий и отправить в тюрьму всех подданных, участвующих во всех этих партиях. Какое наименьшее число партий необходимо было организовать, чтобы заведомо можно было отправить в тюрьму всех врагов народа и только их? (Учтите, что врагами народа может быть весь народ. Царь не является частью своего народа.)

45. Король побывал на всех полях шахматной доски по одному разу, последним ходом вернувшись на исходное поле. Докажите, что при этом он сделал четное число ходов по диагонали.

46. На каждой горизонтали и на каждой вертикали шахматной доски стоит нечетное число фигур. Докажите, что на черных клетках стоит четное число фигур.

47. На доске написано несколько различных целых чисел, причём сумма любых двух из них также написана на доске. Сколько чисел написано?

48. Клетки доски размером 11×11 раскрашены в шахматном порядке так, что белых клеток на доске больше, чем чёрных. На чёрных клетках расставлены 11 ладей. Докажите, что среди них найдутся две ладьи, которые бьют одна другую.

49. Равенство $742586 + 829430 = 1212016$ неверно. Но оно получено из верного равенства заменой всюду некоторой цифры x на некоторую цифру y , а y — на x . Какие эти цифры?

50. Квадрат разрезан на 35 квадратов размером 1×1 и один квадрат большего размера. Какого именно?

Не так уж трудно построить серию выводов, в которой каждый последующий простейшим образом вытекает из предыдущего. Если после этого удалить все средние звенья и сообщить слушателю только первое звено и последнее, они произведут ошеломляющее, хотя и ложное впечатление.

Шерлок Холмс

4. Если бы оба числа были равны меньшему из них, то их сумма была бы на 22 меньше, т.е. равнялась бы $1106 - 22 = 1084$. Следовательно, меньшее число равно половине от 1084, т.е. 542, а большее равно $542 + 22 = 564$.

4'. 508 и 510.

5. $2x = (x + y) + (x - y) = 1543 + 1101 = 2644$. Следовательно, $x = 2644 : 2 = 1322$ и $y = 1543 - 1322 = 221$.

6. Дадим Маше еще 2 шарика. Тогда у нее станет столько же шариков, сколько у Даши. А у Саши 1 шарик заберем — тогда у него станет шариков столько же, сколько у других. Осталось разделить поровну на троих $11 + 2 - 1 = 12$ шариков.

8. *Первый способ.* Второе по величине число больше самого маленького из них на 2, третье — на 4, четвертое — на 6. Если бы все четыре числа были равны наименьшему, то их сумма была бы меньше настоящей на $2 + 4 + 6 = 12$ и была бы равна $1996 - 12 = 1984$. Следовательно, меньшее число равно $1984 : 4 = 496$, а остальные таковы: 498, 500 и 502.

Второй способ. Обозначим меньшее из этих четных чисел через x . Составим уравнение $x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 1996$ и решим его: $4x + 12 = 1996$, $4x = 1996 - 12$, $4x = 1984$, $x = 1984 : 4 = 496$.

9. Если за три дня работник получил кафтан, то за 30 дней работы он получил бы 10 кафтанов. С другой стороны, за 30 дней обещаны 9 рублей и кафтан. Значит, 9 кафтанов стоили 9 рублей. Кафтан стоил 1 рубль.

10. См. рис.1.

14. 3 сестры и 4 брата.

15. а) 90; б) 100; в) 4200; г) 3010; д) 2452450; е) 301000.

16. б) См. рис.2.

17. Мальчики на лодке плывут к другому берегу. Один из них

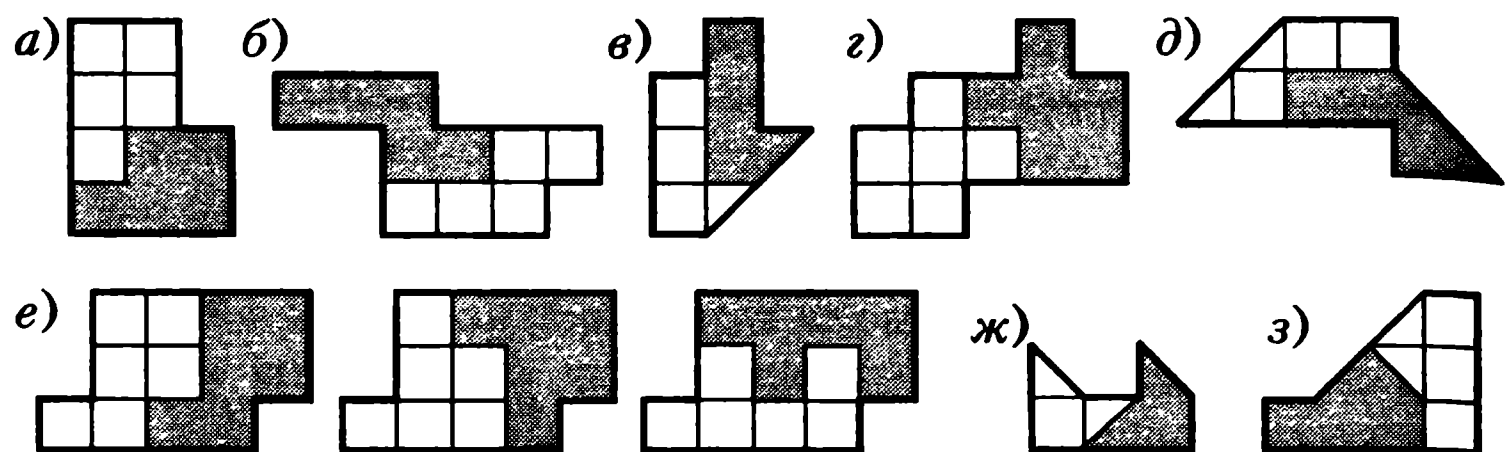


Рис. 1

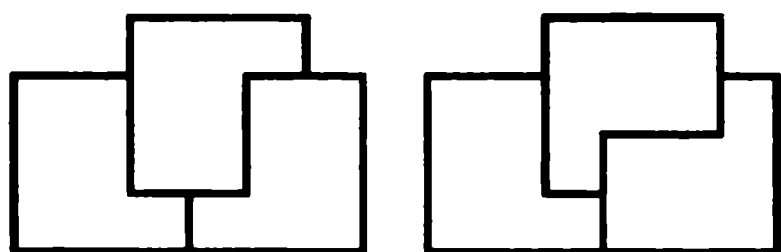


Рис. 2

остается там, а другой возвращается. Один солдат переправляется, вылезает, а мальчик возвращает лодку. Таким образом, чтобы переправить одного солдата, лодка 4 раза плывет от берега до берега.

20. Переходят папа и мама	2 минуты
Папа с фонариком возвращается	1 минута
Переходят бабушка и малыш	10 минут
Мама с фонариком возвращается	2 минуты
Переходят папа и мама	2 минуты

Итого	17 минут
-------	----------

21. Они подошли с разных сторон.

23. Обозначим миссионеров буквами М, м, м, каннибалов – К, к, к, причем большими буквами М и К обозначим миссионера и каннибала, умеющих грести.

	Исходный берег	Желанный берег
Сначала К перевозит (по очереди) к и к;	К Ммм	кк
затем плывут М, м; М, к возвращаются;	Кк Мм	к м
плывут М, К; возвращаются М, к;	кк Мм	К м
переправляются М, м; возвращается К;	Ккк	Ммм
наконец, К переправляет к и к.		Ккк Ммм

24. а) Восстановим сначала цифру в последнем столбце (т.е. в разряде единиц). Так как $* + 4$ не может быть равно 0, то $* + 4 = 10$. Следовательно, последняя цифра первого слагаемого – 6, и в

разряд десятков переносится единица. Поскольку $5 + 8 + 1 = 14$, в разряде десятков суммы стоит 4, а в столбец сотен переносится единица. Тогда $* + 1 = **$, так что в разряде сотен второго слагаемого стоит цифра 9. Мы нашли ответ: $56 + 984 = 1040$.

в) $6750 - 3894 = 2856$.

г) $5927 + 4445 + 7843 = 18215$.

з) Произведение $6*$ на $*$ может быть двузначным числом только в том случае, когда второй сомножитель равен 1. Значит, во второй строке ребуса стоит число 111. Последняя цифра произведения может быть равна 6 только тогда, когда в разряде единиц первого сомножителя стоит 6.

и) Так как число $*2$ оканчивается на 8, следовательно, последняя цифра первого сомножителя 4 или 9. Пусть первый сомножитель равен 29. В этом случае $29 \cdot * = 7*$, чего не может быть ($29 \cdot 2 = 58$, $29 \cdot 3 = 87$). Если первый сомножитель равен 24, то $24 \cdot * = 7*$, откуда первая цифра второго сомножителя есть 3. Дальнейшее очевидно.

25. Начнем проверять пример. В разряде единиц, а также в разряде десятков все сходится. В разряде сотен $1 + 8 \neq 7$. Значит, хотя бы одна из этих цифр была переставлена. Легко проверить, что перестановка не могла произойти только в разряде сотен.

Итак, одна из цифр разряда сотен переставлена с цифрой более старшего разряда.

- Если это цифра 1, то вместо нее должна была стоять цифра 9. Тогда не сойдется сумма в разряде тысяч.

- Если это цифра 8, то вместо нее нужна цифра 6, которой вообще нет в примере.

- Следовательно, надо заменять цифру 8. Поскольку $1 + 8 = 9$, а цифра 9 в старших разрядах только одна, то единственный вариант – поменять цифры 7 и 9. После этой перестановки все сходится: $314159 + 271828 = 585987$.

26. 35.

27. 431 и 43.

28. 6) См. рис.3.

30. 6.

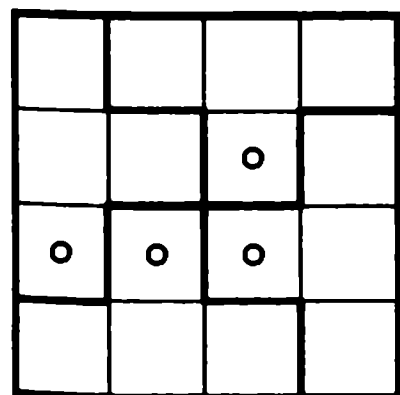


Рис. 3

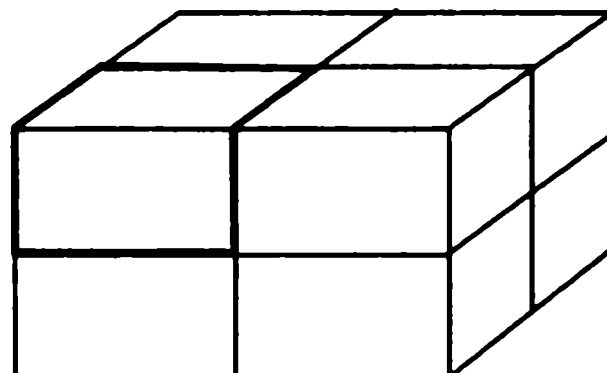
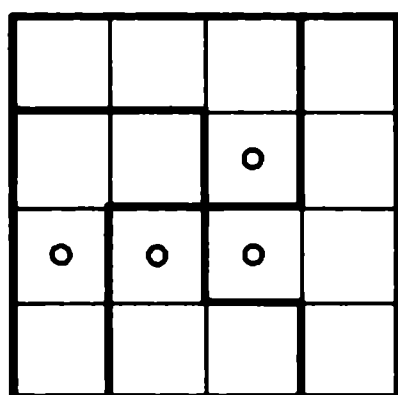


Рис. 4

31. 10.

32. На один раз (рис.4).

34. 400 рублей.

35. Сперва скормим каждому из 10 животных по 5 галет. Останется 6 галет. Но все кошки получили причитающуюся им долю! Значит, 6 оставшихся галет предназначены собакам. А поскольку каждой собаке должно достаться еще по галете, то, следовательно, собак 6, а кошек 4.

Это решение легко проверить. Если 6 собак слопают по 6 галет, на это пойдет 36 галет. А 4 кошки съедят 20 галет. В сумме это составит 56 галет, как и должно быть.

37. Если бы в коробке были только жуки, то ног было бы $6 \cdot 8 = 48$, т.е. на 6 ног меньше, чем указано в задаче. Шесть «лишних» ног осталось из-за того, что у паука на 2 ноги больше, чем у жука. Значит, эти 6 ног принадлежат паукам, т.е. пауков $6 : 2 = 3$. Жуков тогда $8 - 3 = 5$. Итак, в коробке 5 жуков и 3 паука. Проверим: у 5 жуков 30 ног, у 3 пауков 24 ноги, а всего $30 + 24 = 54$ ноги, как и требует условие задачи.

39. 15 алтын и 4 полушки – это 46 копеек – цена старого барана; 10 алтын, т.е. 30 копеек – цена молодого барана. Если бы все бараны стоили по 30 копеек, то за 112 баранов было бы заплачено 33 рубля 60 копеек. Это на 16 рублей меньше, чем заплатили на самом деле. Разница возникла из-за большей цены старого барана – он дороже на 16 копеек. Значит, 16 рублей доплачено за 100 старых баранов. *Ответ:* 100 старых и 12 молодых баранов.

40. См. рис.5.

41. См. рис.6.

42. Если в первой пачке вдвое меньше тетрадей, чем во второй, то в первой пачке $30 : 3 = 10$ тетрадей, а во второй – 20. Значит, в первой пачке было 12 тетрадей, а во второй – 18.

43. Одно яблоко отдайте вместе с корзиной.

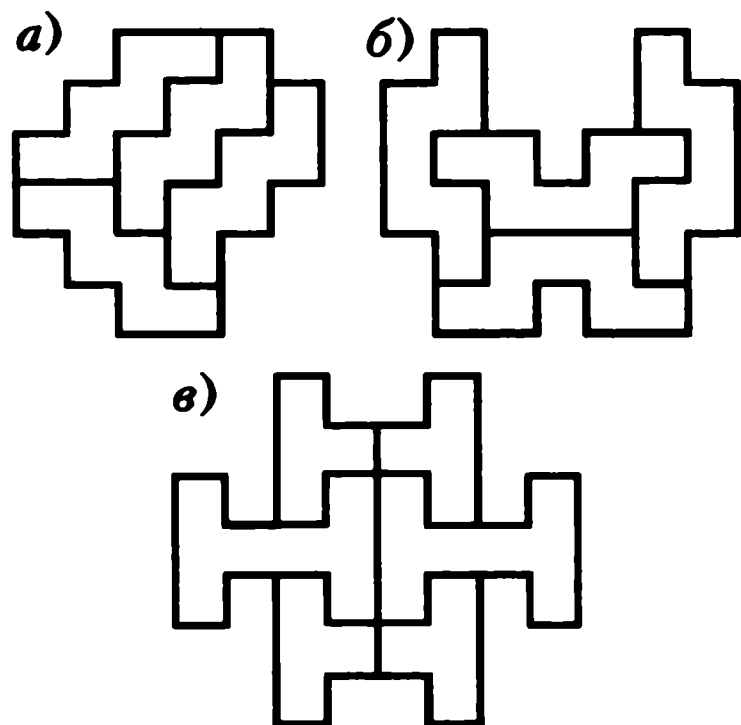


Рис. 5

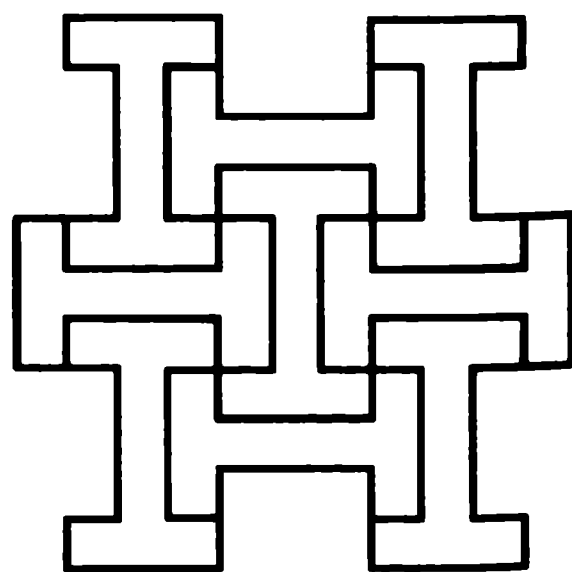


Рис. 6

44. 15 км/ч.
 45. Четыре часа.
 47. Завтракали дед, его сын и внук.
 48. Животных не более трех. Если их три, это кошка, собака и попугай. Если их меньше, это кто угодно – хоть крокодилы.
 49. «Вы спите?»
 50. Например: «Я – президент».
 51. Может: один кошелек внутри другого.
 52. Перелейте воду из второго стакана в пятый.
 55. Двоеточие.
 56. Лестница поднимается вместе с кораблем.
 57. Разделите по вертикали фигурки пополам и вспомните, как пишут индекс на почтовом конверте. Ответ – на рисунке 7.



Рис. 7

58. Министр может вытащить листок бумаги и, не глядя, сжечь его. Поскольку на оставшемся листке написано «Уходите», королю придется признать, что на уничтоженном листке значилось «Останьтесь».

59. 1111.

60. 147.

62. Может. Отец сына – это муж; профессор – женщина.

63. На листе 12 кружочков: 7 с одной стороны и 5 – с другой.

64. а) См. рис.8.

65. а) 7; б) 8.

66. 3.

67. 10.

69. а) 2; б) 3; в) 24.

70. $(14 + 14 + 12 + 14 + 10 + 10) + 1 = 75$ шариков.

71. Выстроим ботинки парами. Тогда всего будет 20 пар. Взяв 21 ботинок, мы обязательно возьмем два ботинка из какой-то пары, т.е. всю ее целиком.

72. а) 3 (см. рис.9); б) 8.

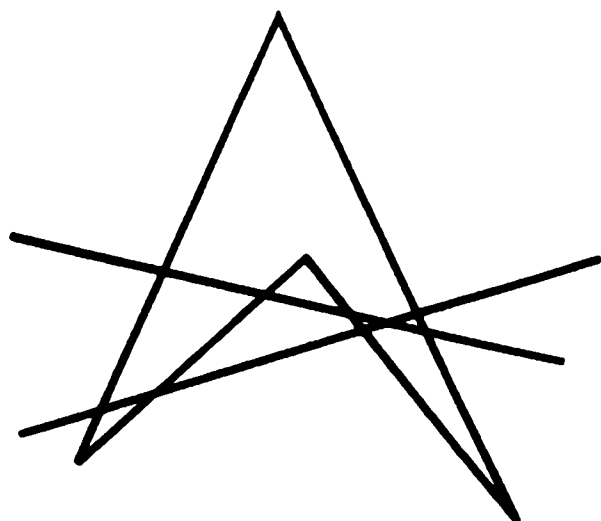


Рис. 8

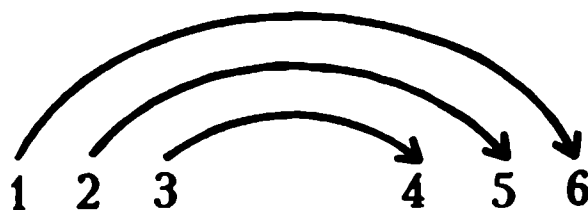


Рис. 9

74. 7. Указание. Если вытащим 8 банок, то это могут оказаться 5 банок малинового и 3 банки вишневого варенья.

75. См. рис.10.

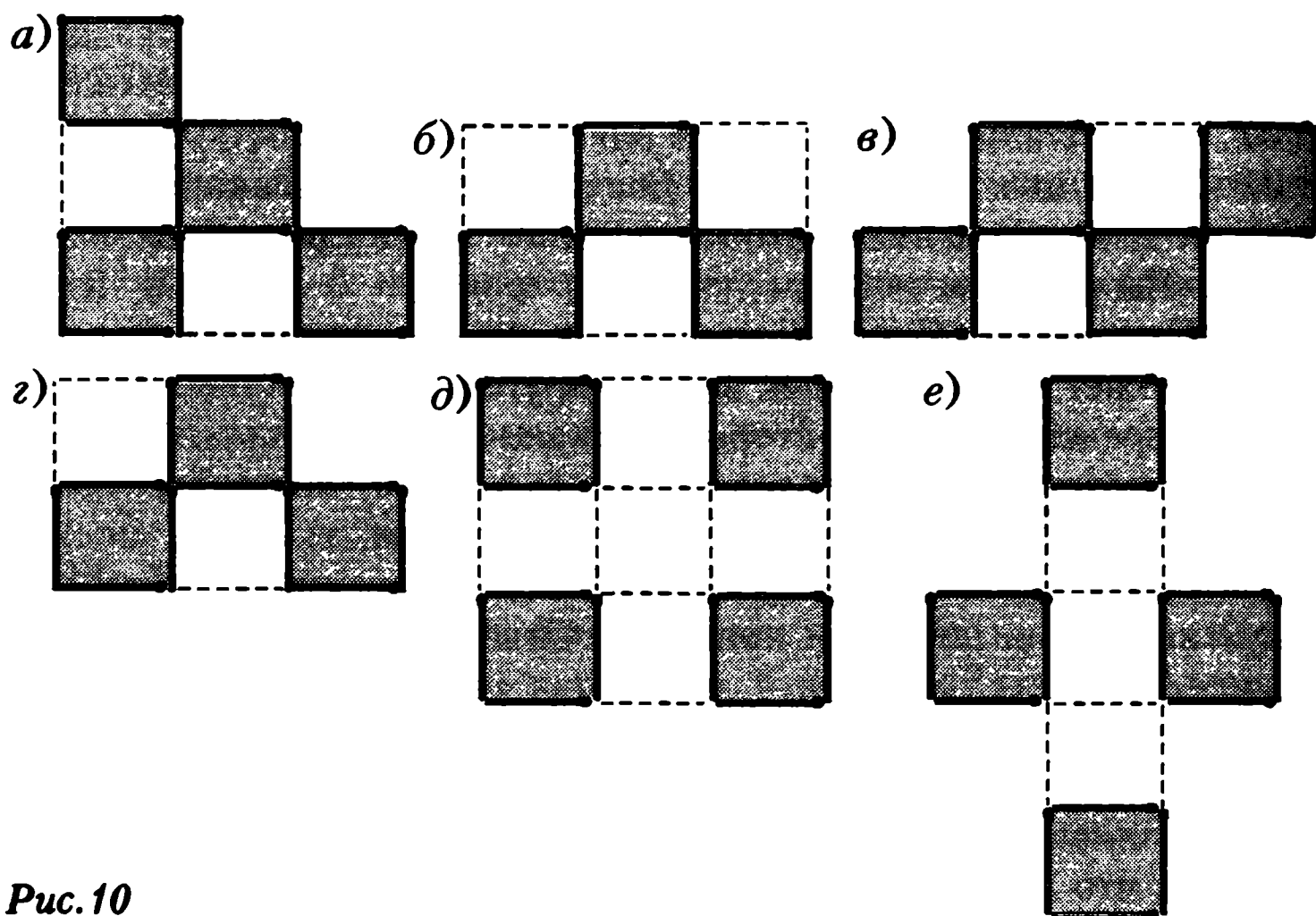


Рис. 10

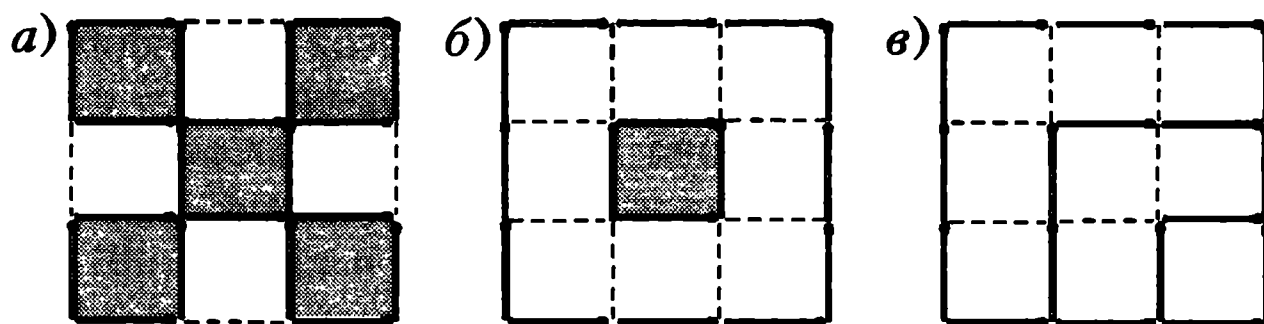


Рис. 11

76. См. рис. 11.

78. См. рис. 12.

79. См. рис. 13.

80. Сложите тетраэдр (рис. 14).

81. В этой записи цифры могут играть следующие роли: быть номером буквы, быть первой цифрой двузначного числа и, наконец, быть второй цифрой. Цифра 0 не может выступать ни в первой, ни во второй роли, а цифра 5 не может выступать во второй роли.

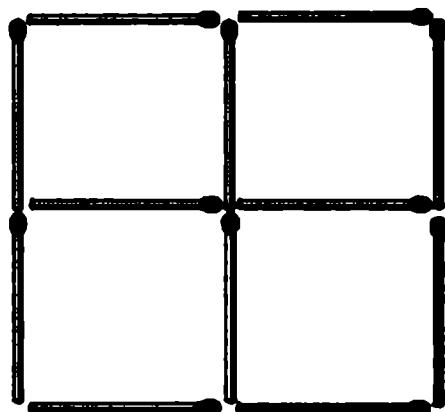


Рис. 12

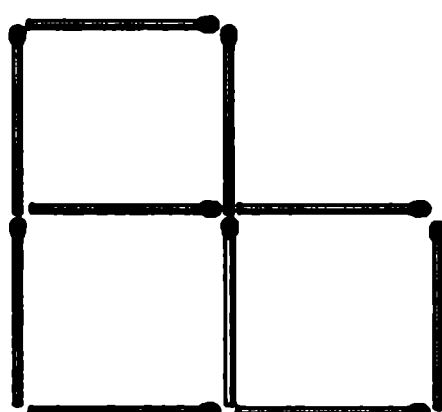


Рис. 13

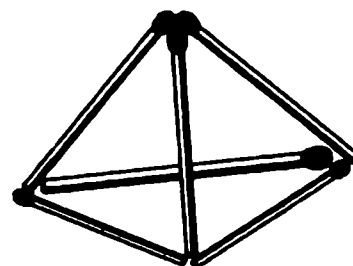


Рис. 14

Первая цифра имени имеет номер 20. Это буква Т. Остальные цифры разбиваются на два блока: 115 и 33. Блок 115 можно представить тремя способами: 1–1–5, 11–5 и 1–15, что соответствует сочетаниям букв **аад**, **йд** и **ан**. Второму блоку можно представить двумя способами: 3–3 и 33, что соответствует сочетаниям **вв** и **я**. Получаем 6 возможностей: **Таадвв**, **Таадя**, **Тйдвв**, **Тйдя**, **Таевв** и **Таня**. Скорее всего, имя девочки – Таня.

6) Фуфайка.

82. См. рис.15.

83. Поровну. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Значит, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1996: это прямоугольники 1×997 , 2×996 , 3×995 , ..., 499×499 .

Аналогично, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1998: 1×998 , 2×997 , 3×996 , ..., 498×501 , 499×500 .

В обоих случаях длина меньшей стороны может быть равна 1, 2, ..., 499.

84. См. рис.16.

89. Можно. Если бы для каждого сорта число ящиков с яблоками этого сорта не превышало 8, то всех ящиков было бы не более $8 \times 3 = 24$, а их 25.

92. 0. Поскольку в этом ребусе 10 различных букв, то встречаются все цифры, включая нуль. На нуль делить нельзя, поэтому множитель 0 – в числителе.

95. Разбейте все множество целых чисел на 5 классов: в один класс поместите числа

$$\dots -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, 26, \dots,$$

дающие остаток 1 при делении на 5, в другой – числа

$$\dots -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots,$$

дающие остаток 2, в третий – числа, дающие остаток 3 при делении на 5, и т.д.

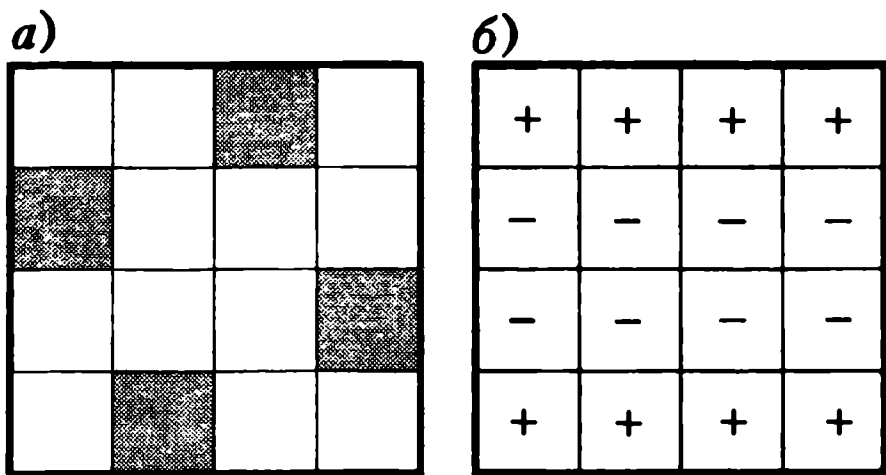


Рис. 15

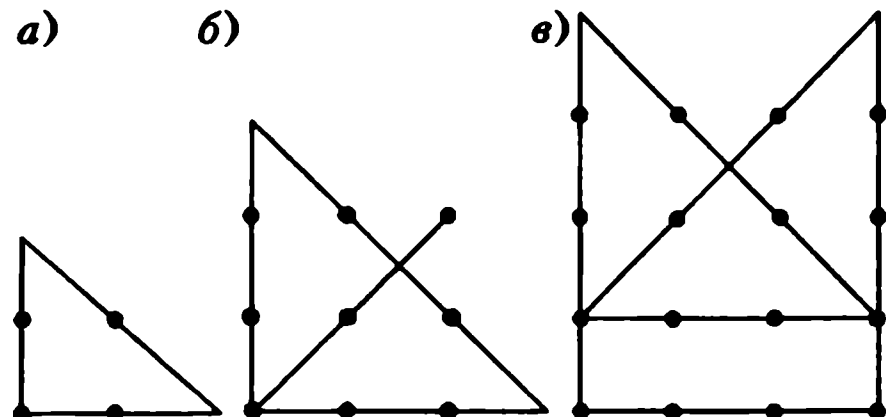


Рис. 16

96. Разбейте все целые числа на n классов в соответствии с тем, какой остаток получается при делении на n .

97. Указание. Двузначное число записывается двумя одинаковыми цифрами тогда и только тогда, когда оно кратно 11.

98. Нет, сумма никаких двух из чисел вида $7n + 1$, где $n = 0, 1, 2, \dots, 99$, не кратна 7.

99. Нет.

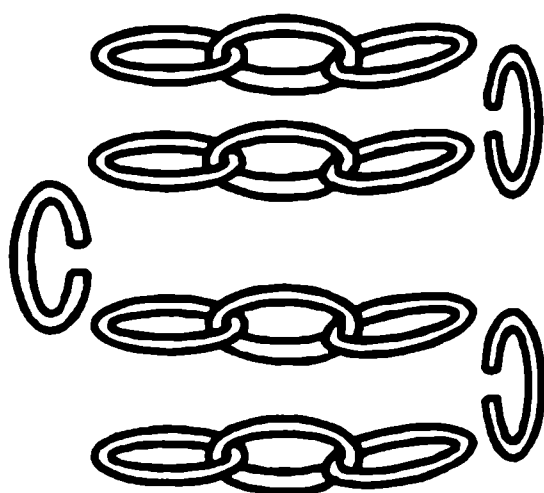
100. а) Нет, из чисел $0, 1, 2, \dots, 50$ нельзя выбрать два числа, сумма или разность которых кратна 100.

б) Указание. Рассмотрите 51 ящик с табличками $0, 1-99, 2-98, 3-97, \dots, 49-51, 50$. Число помещайте в ящик, на табличке которого присутствует остаток от деления числа на 100. Если чисел 52, какие-то два попадут в один ящик.

101. 41312432.

103. В пять раз.

104. Из пяти камешков два лежат по краям, три – между ними.



Значит, между камешками четыре промежутка, каждый по 3 см. Таким образом, расстояние от первого камешка до последнего равно 12 см.

105. После 7 дней, ибо последний кусок отрезать не надо.

107. Можно было целиком расковать одну цепь (рис.17).

108. Во вторник следующей недели в 6 часов вечера. В самом деле, за сутки гусеница поднимается вверх на 1 метр. Значит, за 8 суток (т.е. к 6 часам утра

вторника следующей недели) она окажется на высоте 8 метров и к 18 часам покорит вершину!

109. См. рис.18.

110. См. рис.19.

112. См. рис.20.

113. Нарисуйте шестиугольник (рис.21). Впрочем, два треугольника тоже сгодились бы!

а)

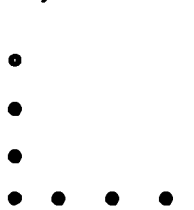
1	5	1
5		5
1	5	1

б)

3	1	3
1		3
3	1	3

Рис.18

а)



б)

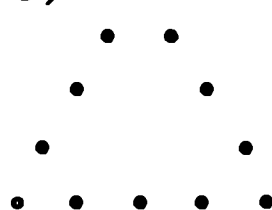


Рис.19

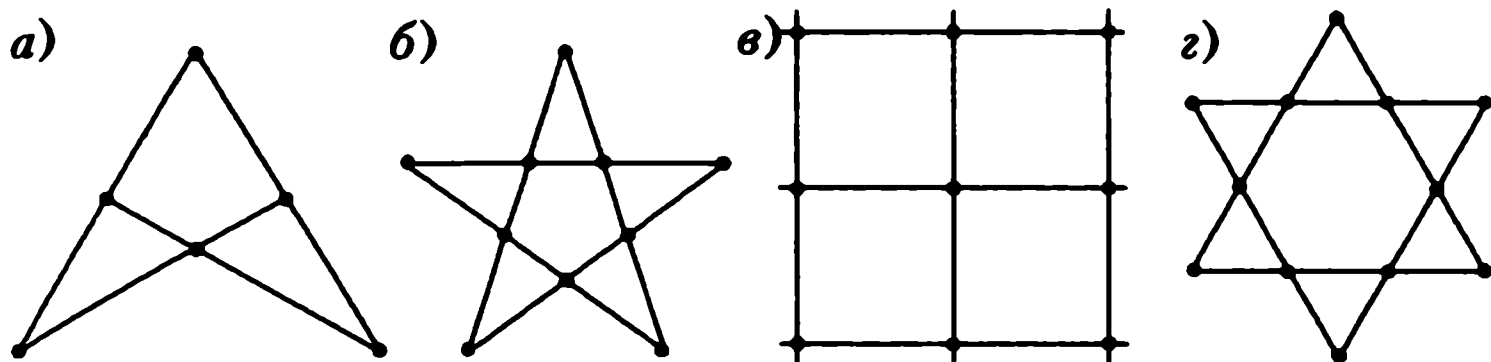


Рис. 20

114. $(999 - 9) : 99 = 10$.

115. 900.

116. Распространенный неправильный ответ – 10 рублей. Допустим, однако, что у них, скажем, по 50 рублей. Если Акулина даст 10 рублей, то у Анфисы окажется 60 рублей, а у Акулины 40. Следовательно, разница составит не 10, а 20 рублей.

Ответ: 5 рублей.

117. Пакет молока на 14 копеек дороже.

118. Купить 5 больших птиц – то же, что купить 10 маленьких, так что покупка 5 больших и 3 маленьких птиц равноценна покупке 13 маленьких. Аналогично, цена 3 больших и 5 маленьких равна цене 11 маленьких птиц. Значит, $13 - 11 = 2$ маленькие птицы стоят 20 рублей. Ответ: 20 рублей.

119. Дедушке 84 года, внучке 7 лет.

120. Деду $100 - 45 = 55$ лет, сыну $(45 - 25) : 2 = 10$ лет, отцу $10 + 25 = 35$ лет.

121. Отнимем 10 рублей. Останется 90. Значит, 90 – это «все деньги» и еще «половина всех денег», т.е. 90 – это три «половины всех денег». Разделив 90 на 3, узнаем, что «половина всех денег» – это 30. Ответ: 60 рублей.

124. Если собака стоит x рублей, то корова стоит $4 \cdot x$, 2 коровы – $8 \cdot x$, а лошадь – $16 \cdot x$. Чтобы найти x , разделим 200 рублей на $1 + 8 + 16 = 25$ частей. Итак, собака стоит 8 рублей, а корова – 32.

126. 2. Указание: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365 = 13^2 + 14^2$.

128. Три курицы снесли за 3 дня 3 яйца. Следовательно, 3 курицы снесут за 12 дней в 4 раза больше яиц ($3 \cdot 4 = 12$), а 12 кур за 12 дней еще в 4 раза больше, т.е. $12 \cdot 4 = 48$ яиц.

130. За 2 часа 6 землекопов выроют 6 ям, за 5 часов – в $2\frac{1}{2}$ раза больше, т.е. 15 ям.

131. Косец за час выпивает $1/48$ бочонка. За 3 часа один косец выпивает $1/12$ бочонка. Ответ: 12 косцов.

133. См. рис.22.

134. См. рис.23.

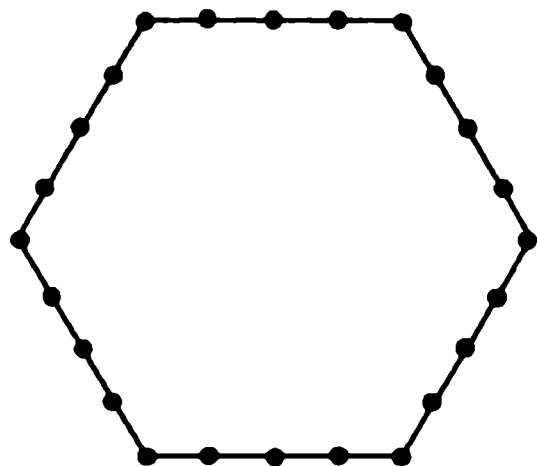


Рис. 21

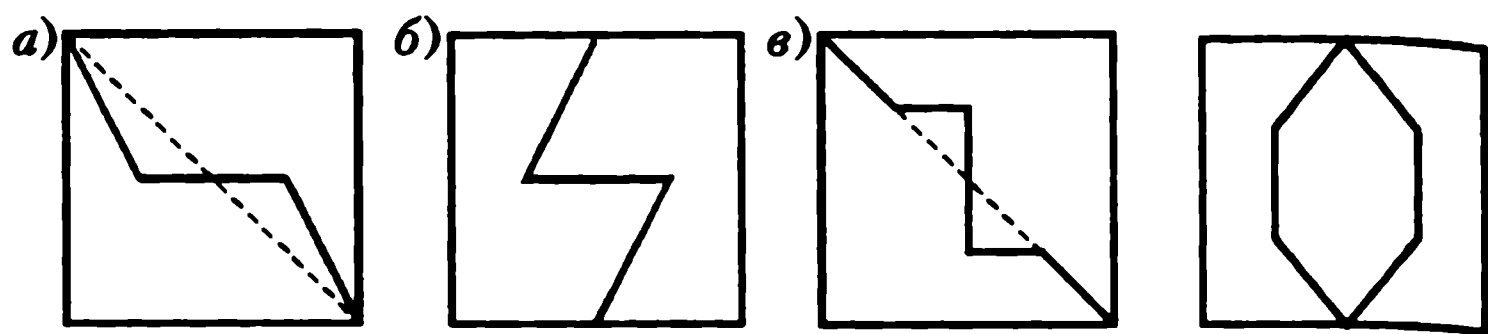


Рис. 22

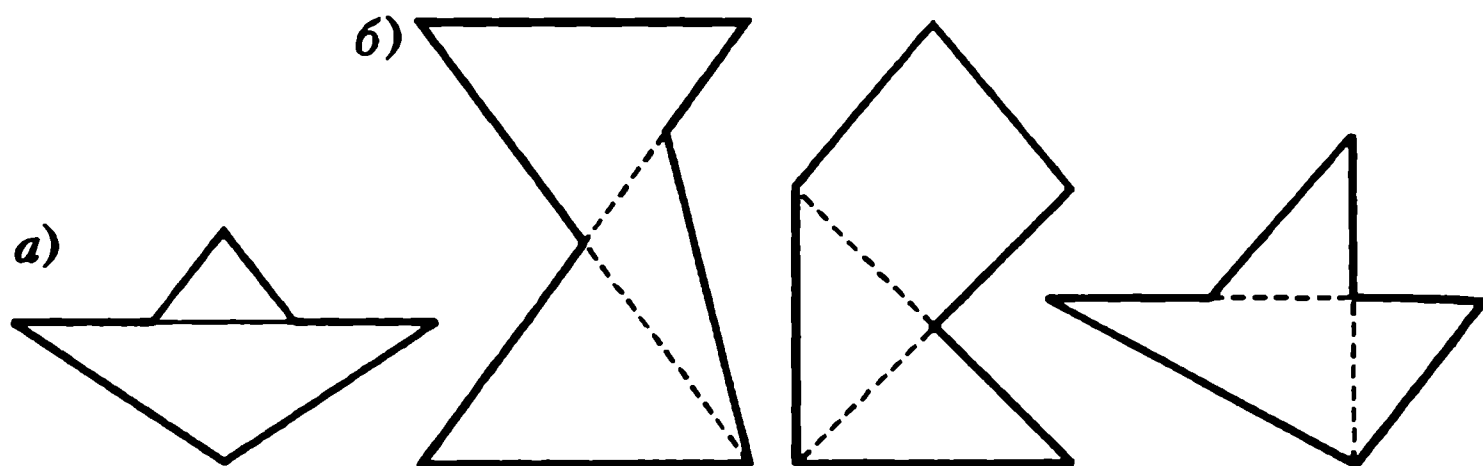


Рис. 23

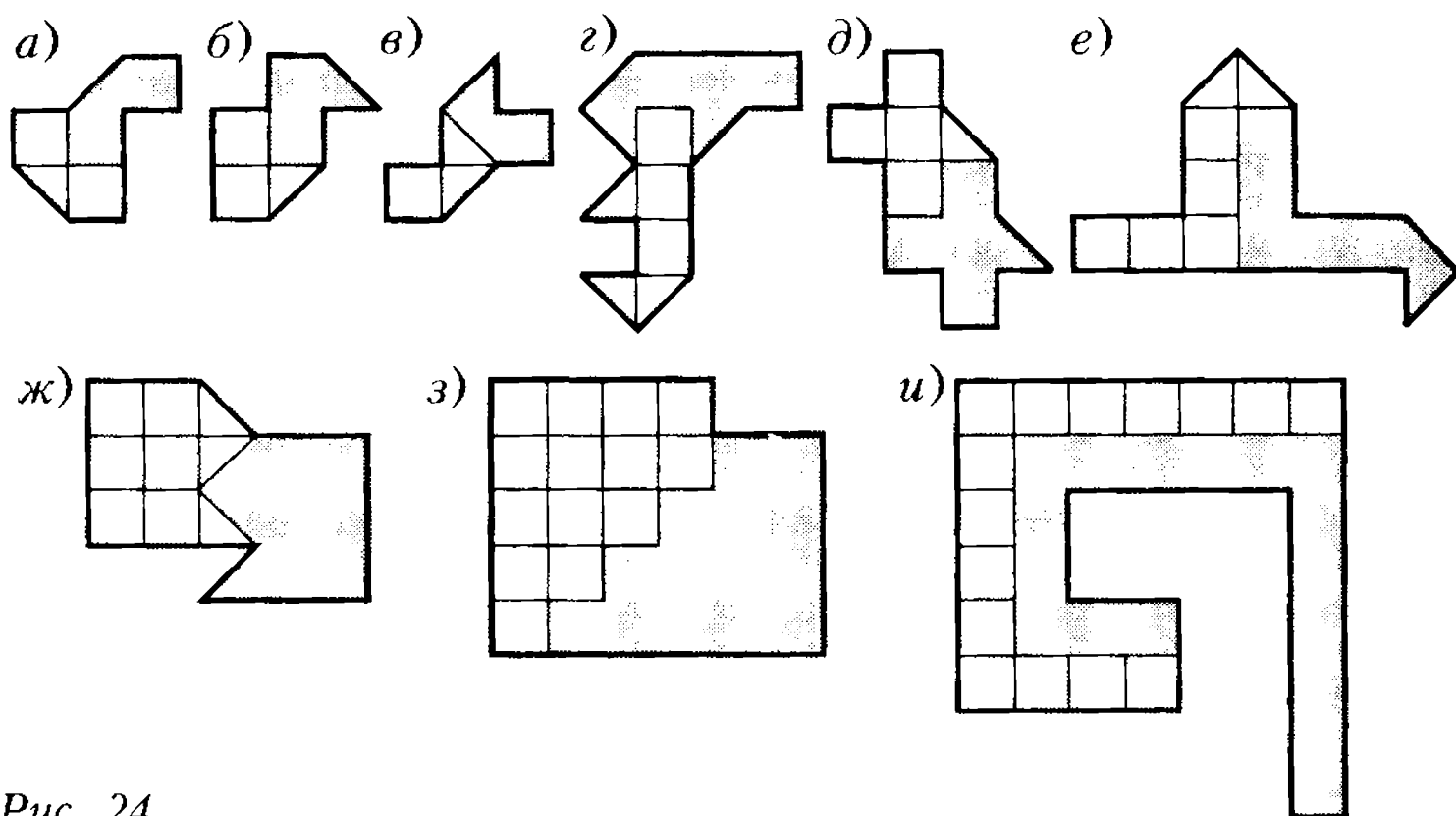


Рис. 24

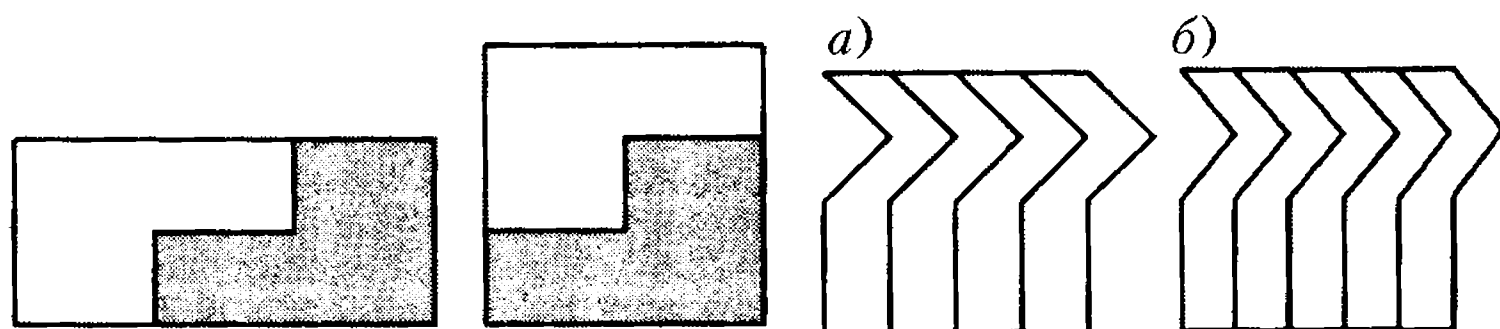


Рис. 25

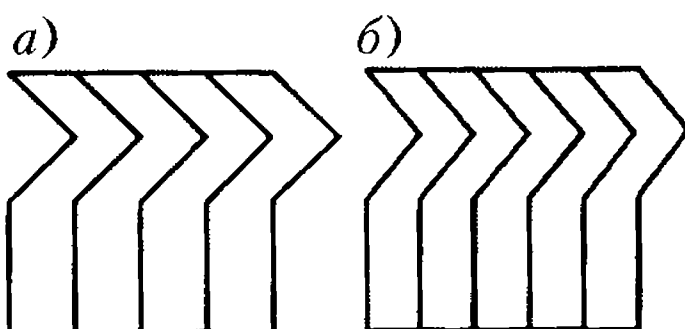


Рис. 26

137. См. рис.24.

139. См. рис.25.

140. См. рис.26.

141. Разрежем доску на две половины по вертикали. Теперь каждая половинка легко режется пополам (рис.27,*а*). Впрочем, этот способ не единственный (рис.27,*б-ж*).

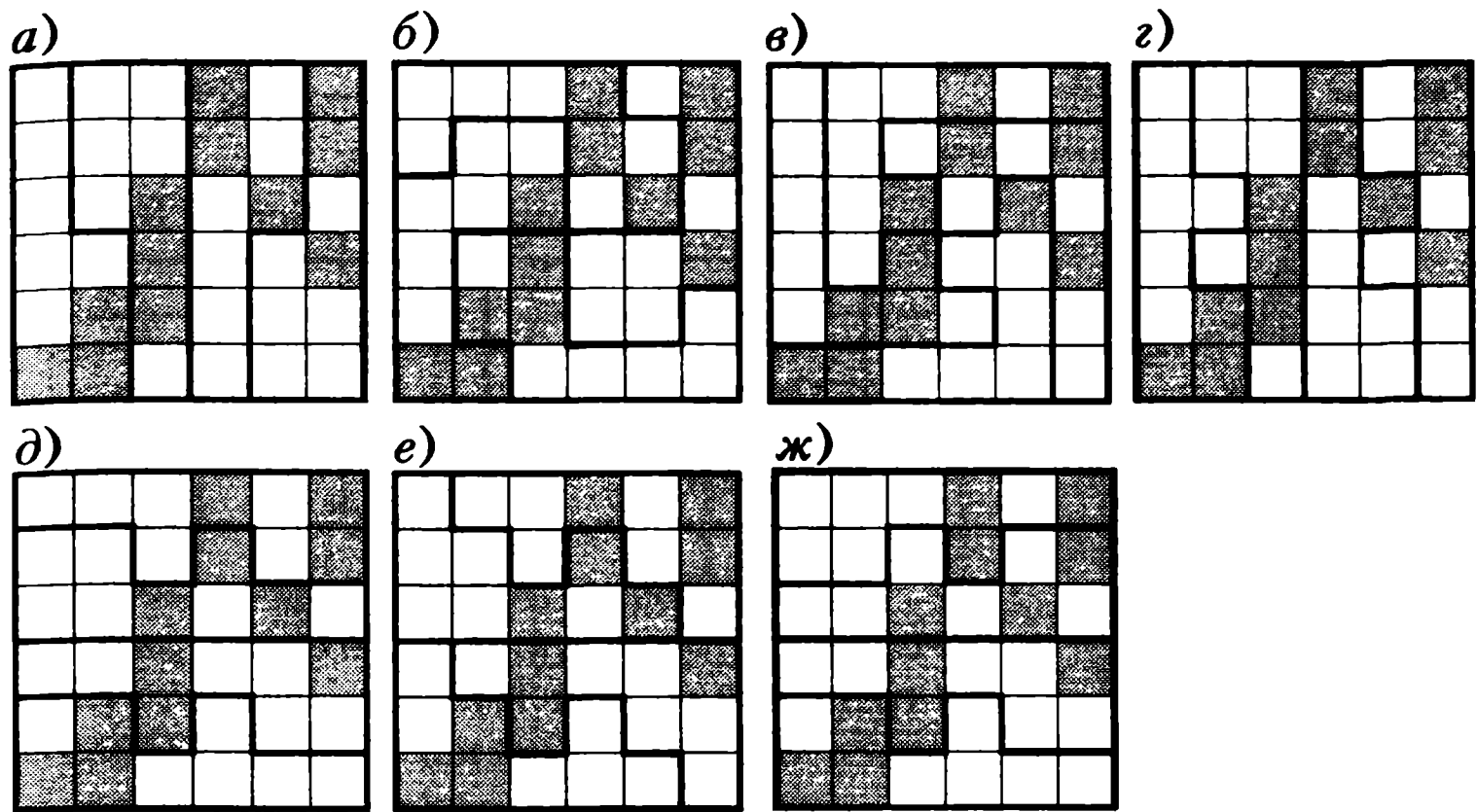


Рис. 27

143. См. рис.28.

144. Проведите средние линии (рис.29).

145. Соедините вершину прямого угла с серединой гипотенузы (рис.30). Доказать, что получатся именно равнобедренные треугольники,

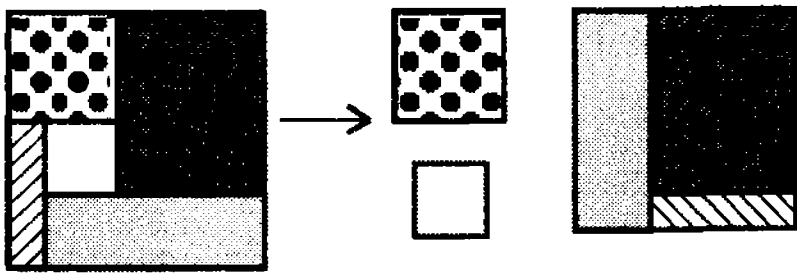


Рис. 28

очень просто: прямоугольный треугольник можно достроить до прямоугольника (рис.31), а диагонали прямоугольника равны и делятся точкой пересечения пополам.

146. См. рисунок 32.

147. См. рисунок 33.

149. Рассуждайте с конца. *Ответ:*
 $((2 \cdot 7 + 6) : 4) \cdot 3 - 5 = 10$.

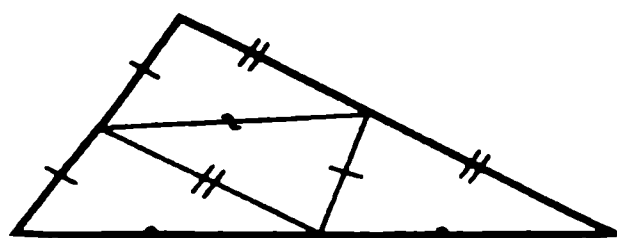


Рис. 29

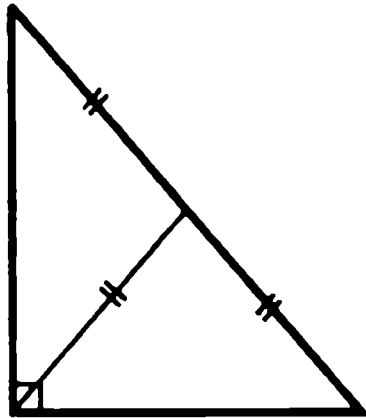


Рис. 30

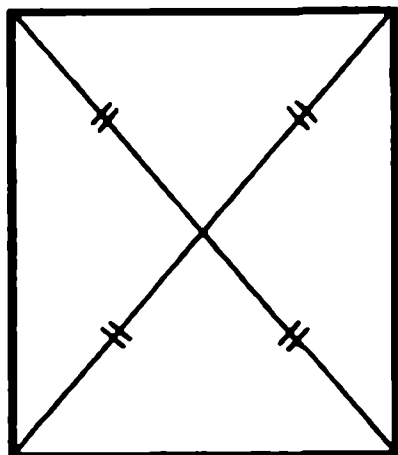


Рис. 31

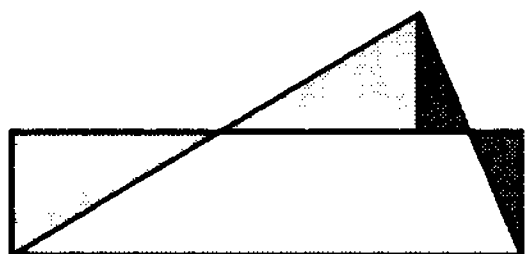


Рис. 32

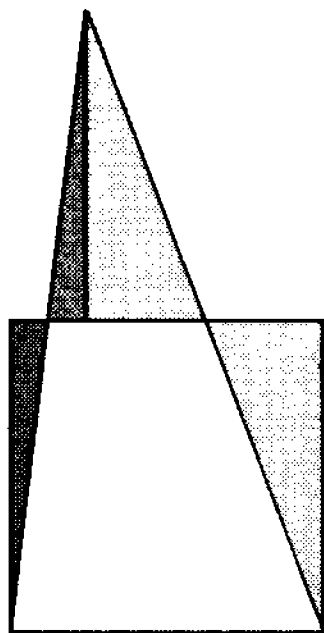


Рис. 33

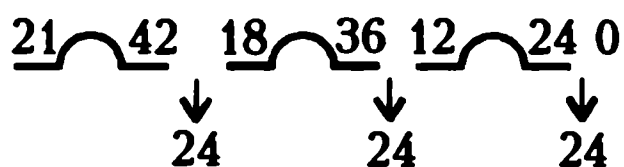


Рис. 34

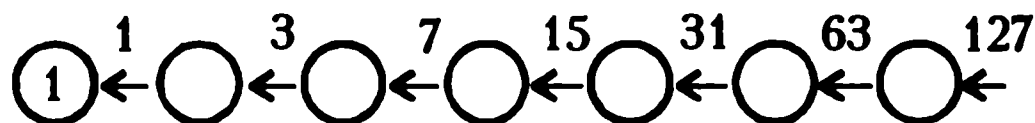


Рис. 35

156. Любое число от 100 до 109. Разность между числом и суммой его цифр всегда делится на 9. Поэтому все числа, кроме, возможно, исходного, должны делиться на 9. Следовательно, 0 получился из 9, число 9 получилось из 18, и вообще, имеем цепочку:

$$0 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 27 \leftarrow 36 \leftarrow 45 \leftarrow 54 \leftarrow 63 \leftarrow 72 \leftarrow 81$$

Здесь нужно быть внимательным: 81 можно получить как из 90, так и из 99. Но 90 ни из какого числа не получишь! А число 99 получается из 100, из 101, ..., из 109.

Для Знайки. Подумайте, с какого числа нужно начинать, чтобы впервые получить 0 после сотой операции вычитания. (Ни калькулятор, ни более мощную вычислительную технику использовать не следует! Вполне достаточно ручки и листка бумаги.)

157. См. рис.36.

158. См. рис.37.

159. См. рис.38.

150. Она собрала $10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$ яблок. Стражники награбили $160 - 10 = 150$ яблок.

151. См. рис. 34.

153. Витя съел 4 сливы. Значит, увидел он $4 \cdot 3 = 12$ слив. Составим таблицу:

	Мама	Аня	Боря	Витя
Увидел(а)	—			12
Съел(а)	—			4
Оставил(а)	?			—

Заполним ее. Боря оставил те самые 12 слив, которые увидел Витя. Боря съел треть увиденных им слив. Значит, Боря съел 6 слив, а увидел 18 слив. Именно столько слив оставила Аня (между прочим, $12 : (2/3) = 18$). Мама оставила $18 : (2/3) = 27$ слив.

154. 127. Решение ясно из рисунка 35.

155'. 256.

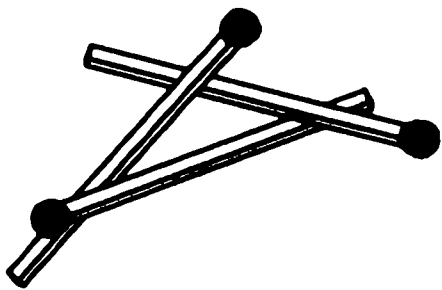


Рис. 36

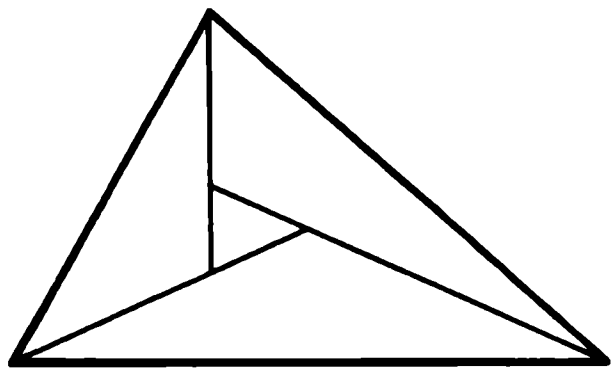


Рис. 37

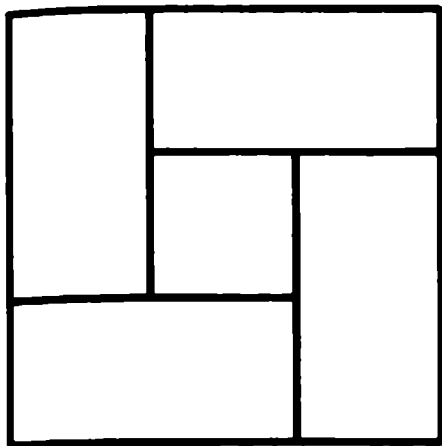


Рис. 38

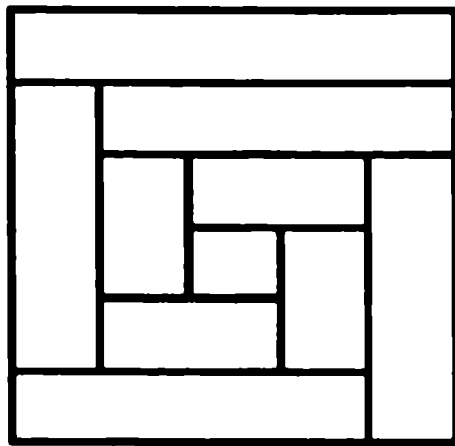


Рис. 39

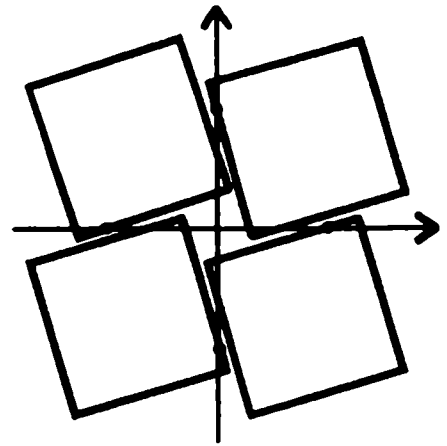


Рис. 40

160. См. рис.39.

161. См. рис.40.

162. Ответ – на рисунке 41. Если вставить седьмой карандаш перпендикулярно остальным шести карандашам, то можно так подобрать размеры, что получим семь карандашей, касающихся друг друга (рис.42)!

163. 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

166. а) $n + 1$ грань, $n + 1$ вершина и $2n$ ребер; б) $n + 2$ грани, $2n$ вершин и $3n$ ребер.

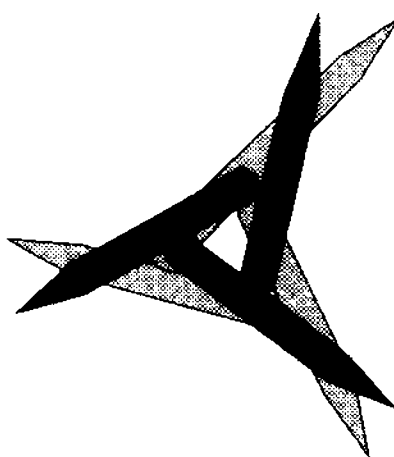


Рис. 41

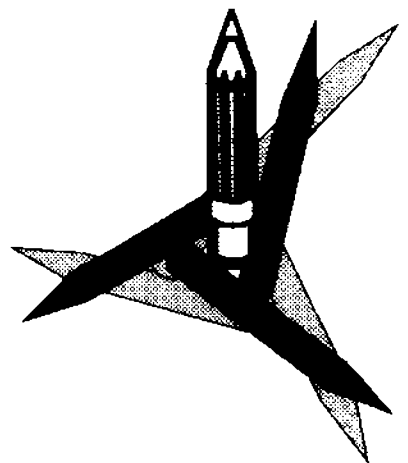


Рис. 42

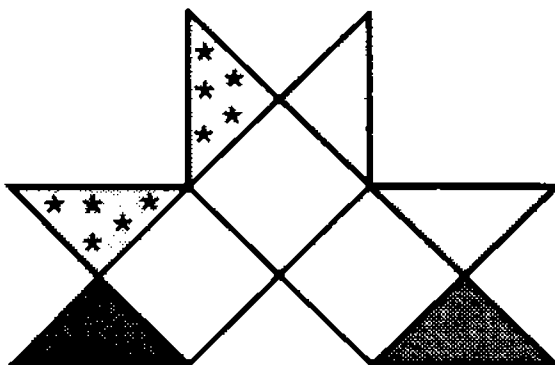


Рис. 43

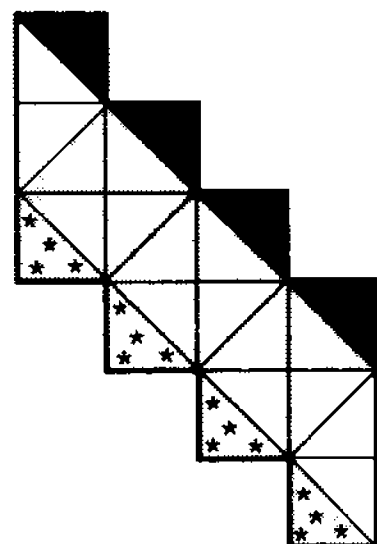


Рис. 44

167. 8. Указание. Призма имеет не только боковые грани, но и основания.

168. 24 ребра и 12 вершин. Этот многогранник можно получить из куба, отметив середины ребер куба и отрезав восемь «уголков» — треугольных пирамид, вершинами каждой из которых являются одна из вершин куба и середины трех выходящих из этой вершины ребер.

169. а) См. рис.43; б) см. рис.44.

170. См. рис.45.

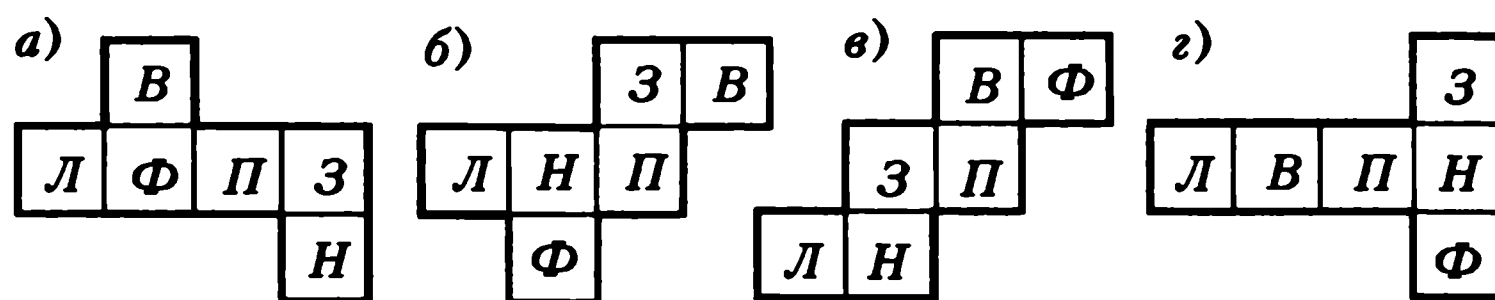


Рис. 45

171. а) ДО, РЕ, МИ. б) Е, И, М, Р.

172. б) См. рисунки 68 и 69 к условию задачи 247.

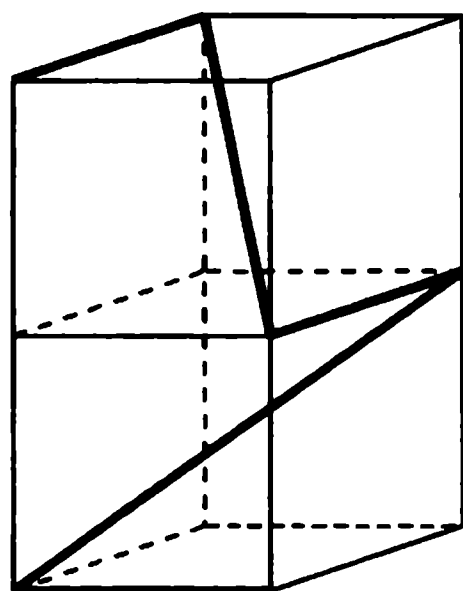


Рис. 46

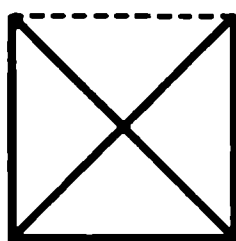


Рис. 47

175. Пространственная траектория рыбки выглядит, как на рисунке 46, а ответ приведен на рисунке 47.

176. Если бы напротив круга был круг, то куб не мог бы выглядеть так, как на средней картинке (ибо из любых двух противоположных граней куба только одна видна на картинке). Значит, на третьей картинке круг находится на левой или нижней грани кубика. Разберем эти два случая.

- Если круг на левой грани, то единственный способ увидеть одновременно круг, пустую грань и ромбик — посмотреть на кубик третьей картинке снизу слева (двух ромбиков быть не может — в противном случае не найдется места для треугольников). Но при этом, по часовой стрелке, мы увидим круг, ромбик и белую грань, а должно быть наоборот: круг, белая грань и ромбик.

- Во втором случае по той же причине, что в первом, невозможно увидеть первую картинку, если смотреть справа снизу. Значит, на самом деле белая грань, которую мы видим на первой картинке, расположена слева на третьей картинке. Это означает, что напротив белой грани расположена белая грань, внизу третьей картинке —

круг, а на задней грани третьей картинки – треугольник. Развертка изображена на рисунке 48.

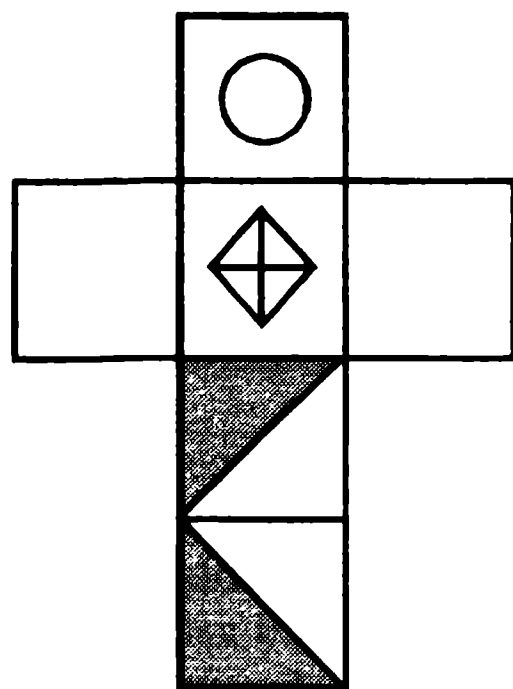


Рис. 48

178. $3 : 3 + (3 - 3) \cdot 3 = 1$; $(3 + 3) : 3 + 3 - 3 = 2$; $3 + (3 - 3) \cdot 33 = 3$; $3 : 3 + 3 - 3 + 3 = 4$; $3 : 3 + 3 : 3 + 3 = 5$; $3 + 3 + (3 - 3) \cdot 3 = 6$; $3 \cdot 3 - (3 + 3) : 3 = 7$; $3 + 3 + (3 + 3) : 3 = 8$; $3 \cdot 3 - (3 - 3) : 3 = 9$; $3 : 3 + 3 + 3 + 3 = 10$.

179. $7 : 7 + 7 - 7 = 1$; $7 : 7 + 7 : 7 = 2$; $(7 + 7 + 7) : 7 = 3$; $77 : 7 - 7 = 4$; $7 - (7 + 7) : 7 = 5$; $(7 \cdot 7 - 7) : 7 = 6$; $7 + (7 - 7) \cdot 7 = 7$; $(7 \cdot 7 + 7) : 7 = 8$; $7 + (7 + 7) : 7 = 9$.

180. а) $4 \cdot 12 + 18 : (6 + 3) = 50$;
б) $(4 \cdot 12 + 18) : (6 + 3) = 22/3$; в) $4 \cdot (12 + 18 : 6 + 3) = 72$.

182. в) $(1 - 2) \cdot 3 + (4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8) \cdot 9 = 1995$.

183. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 5 + 6 + 7 \cdot 8 + 9 = 100$.

184. Можно. Вот одно из возможных решений: а) $9 = (22 - 2 - 2) : 2$; б) $13 = (22 + 2 + 2) : 2$; в) $113 = 222 : 2 + 2$.

185. $1 + 1999 = 2000$. *Указание.* Поскольку при сложении двух чисел из любого разряда в следующий переносится не более чем 1, то цифра Е должна быть равна 9 – иначе не было бы переноса из разряда десятков в разряд сотен. Дальнейшее очевидно.

188. Из первых двух строк заключаем, что 8 сапфиров с 16-ю топазами стоят столько же, сколько 24 изумруда. Из следующих – что столько же стоят 21 сапфир вкупе с тремя топазами. Следовательно, $21 - 8 = 13$ сапфиров равноценны $16 - 3 = 13$ топазам.

Алгебраически это записывают так:

$$\begin{cases} x + 2y = 3z, \\ 7x + y = 8z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 16y = 24z, \\ 21x + 3y = 24z \end{cases} \Rightarrow 8x + 16y = 21x + 3y \Rightarrow 13y = 13x.$$

Ответ: одинаково.

190. 15.

191. Обозначим буквой x наименьшее из этих чисел. Составим уравнение:

$$\begin{aligned} x + (x + 1) + (x + 2) &= \\ &= (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) + (x + 7). \end{aligned}$$

Решим его:

$$3x + 3 = 5x + 25,$$

$$2x = -22,$$

$$x = -11.$$

Ответ: $-11, -10, \dots, -3, -4$.

194. 37.

196. 4 кг и 3 кг.

197. Указание. Сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому.

198. Указание. Составьте и решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2 = y - 2, \\ y + 2 = 2(x - 2). \end{cases}$$

Ответ: 10 и 14 слив.

200. 120 км.

200'. $(x; y; z) = (120; 40; 240)$.

202. 30 и 150.

203. Первый способ. Если $a < b < c$ — натуральные числа, сумма любых двух из которых делится на третье, то $a + b < 2c$ и $a + b$ делится на c , т.е. $a + b = c$. Поскольку $2a + b = a + c$ делится на b и $2a < 2b$, непременно $2a = b$. Значит, $(a, b, c) = (a, 2a, 3a)$, так что

$$a + 2a + 3a = 186,$$

откуда $a = 31$, $b = 2a = 62$ и $c = 3a = 93$.

Второй способ. Если $a + b$ кратно c , то и $a + b + c$ кратно c . Поэтому каждое слагаемое должно быть делителем числа 186. Выпишем все делители: 1, 2, 3, 6, 31, 62, 93 и 186. Теперь ответ очевиден: $31 + 62 + 93 = 186$.

204. $216 : 36 = 6$.

206. Обозначив эти числа буквами x и y , составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3xy, \\ 2(x + y) = xy. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x = 2y$, а тогда из второго уравнения $2(2y + y) = 2y \cdot y$, т.е. $3y = y^2$, откуда $y = 0$ или $y = 3$.

Ответ: $(x; y) = (0; 0)$ или $(6; 3)$.

207. а) 9876543210; б) 9876543120.

208. 1023456798.

209. 19999999999900.

214. а) Наибольшее число должно начинаться с наибольшего числа девяток (их может быть не больше пяти). Это — девятки из первых пяти десятков. Шестая цифра должна быть наибольшей из тех, после которых остается не менее 5 цифр. Такой является лишь цифра 7. **Ответ:** 99999785960.

217. 163.

219. Метод ясен из таблицы:

	1-я котлета	2-я котлета	3-я котлета
1-я минута	+	+	
2-я минута	+		+
3-я минута		+	+

221. а) Посмотрите на таблицу, строки которой соответствуют лошадям, а столбцы – пятиминуткам. Знаки «-» означают, что первую лошадь не подковывают в первые пять минут, вторую – не подковывают во вторые пять минут, ...

	I	II	III	IV	V
Первая	-				
Вторая		-			
Третья			-		
Четвертая				-	
Пятая					-

б) Разбейте кузнецов на 12 бригад по 4 кузнеца в каждой бригаде и поручите каждой бригаде подковать 5 лошадей.

222. На рисунке 49 изображены три «слоя» куба и расставлены буквы К, Ж и З, обозначающие цвета соответствующих единичных кубиков.

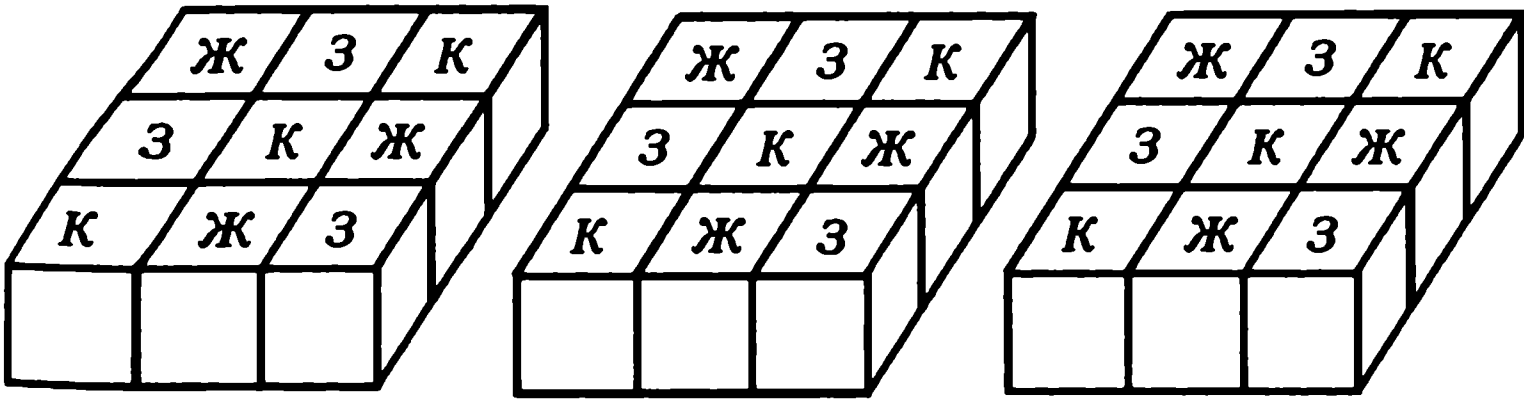


Рис. 49

223. Решение изображено на рисунке 50. Его можно изобрести, если расположить один из блоков в центре, а остальные – в вершинах правильного пятиугольника (рис.51).

Интересно, что если блоков $2n$, а цветов $2n - 1$, то конструкция аналогична: на рисунке 52 показаны провода одного из цветов для $n = 8$; поворачивая эту конструкцию, получаем требуемую раскраску.

224. Пронумеруем борцов в соответствии с их силой числами от 1 до 9. Разумно сначала разбить их на три группы {1, 2, 3}, {4, 5, 6},

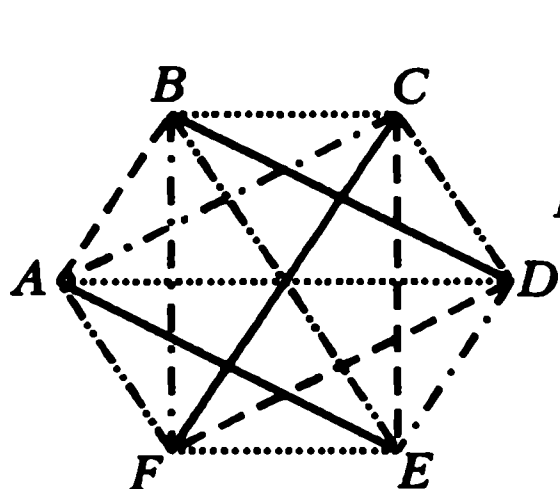


Рис. 50

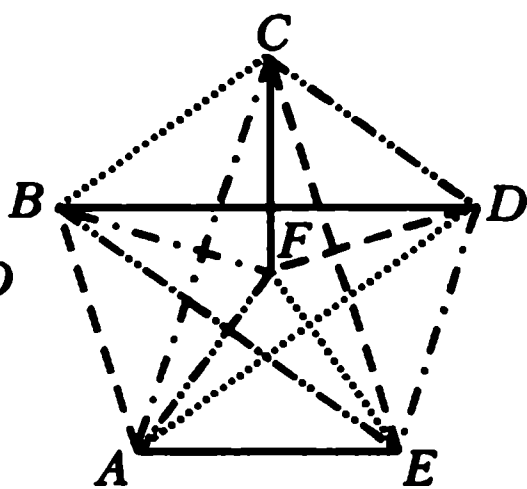


Рис. 51

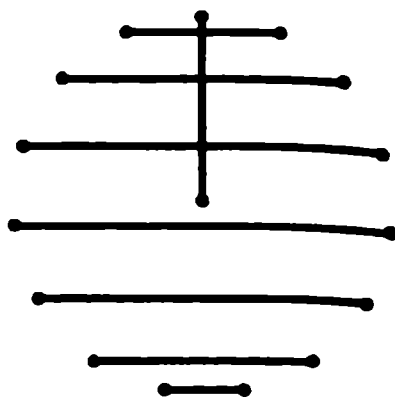


Рис. 52

{7, 8, 9}, а затем в каждую команду направить по одному борцу из каждой группы. Этот путь действительно приводит к успеху: проверьте, что команды {1, 5, 9}, {2, 6, 7} и {3, 4, 8} удовлетворяют требованиям задачи.

225. Указание. Составьте и решите уравнение $x = 1 + x/2$.

226. Четверть круга весит 1 кг, круг — 4 кг.

227. Пусть «Спартак» забросил x мячей, а «Динамо» — y мячей. Из условия следует, что $x = 21 - y$. Следовательно, $x + y = 21$.

230. Поровну.

231. Каждый выиграл (белыми и черными) столько же партий, сколько все вместе (в том числе и он) — черными.

232. В этой тетради 99 ложных утверждений.

233. Кот мог чихнуть просто так, или из-за болезни. Дождя может не быть.

235. У Вовы 1000 или 0 книг.

236. Поскольку красные шарики путал лишь один человек, на самом деле было 2 красных шарика. Следовательно, С путал красный с оранжевым. Значит, С правильно посчитал желтые и зеленые шарики. Осталось заметить, что В путал желтые и зеленые, следовательно, правильно посчитал оранжевые. *Ответ:* 2 красных, 4 оранжевых, 8 желтых и 9 зеленых шариков.

238. Добрыня Никитич и Алеша Попович сказали одно и то же, поэтому правду сказал Илья Муромец. Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.

239. Если предположить, что неправду сказал Алеша, то получится, что он был первым или последним, но тогда неправду сказал еще либо Ваня, либо Гриша, а это противоречит условию — неправду сказал только один из мальчиков. Аналогично рассматриваются и все другие возможности. *Ответ:* неправду сказал Ваня; первым был Боря.

241. В третьем ящике не крупа и не сахар. Следовательно, в нем мука. Далее, в первом ящике не крупа. Но там и не мука, поскольку мука в третьем ящике. Следовательно, в первом ящике сахар. Тогда во втором единственное, что осталось, — крупа.

242. Туфли Бама не могут быть ни красными, ни зелеными (ибо зеленые туфли у Бама). Значит, они синие. Биму остаются красные туфли. Поэтому и рубашка у него красная. Тогда рубашка Бама синяя, а Бама – зеленая.

243. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.

244. Указание. Условие удобно перенести в таблицу. В ней уже отмечено знаками «→» то, что девочка в зеленом платье – не Аня и не Валя. Осталось отметить другие условия и решить задачу.

	Белое	Голубое	Зеленое	Розовое
Аня			→	
Валя			→	
Галя				
Надя				

Ответ: Аня в белом платье, Валя в голубом, Галя в зеленом, Валя в розовом.

245. Все химики должны ответить одинаково, и все алхимики – тоже. Если больше химиков, то химики так и скажут, но среди 51 опрошенных обязан найтись химик; противоречие. Если же больше алхимиков, то все они соврут, т. е. скажут, что больше химиков, и опять-таки среди 51 опрошенных хотя бы один – алхимик. **Ответ:** химиков и алхимиков поровну.

246. См. рис.53.

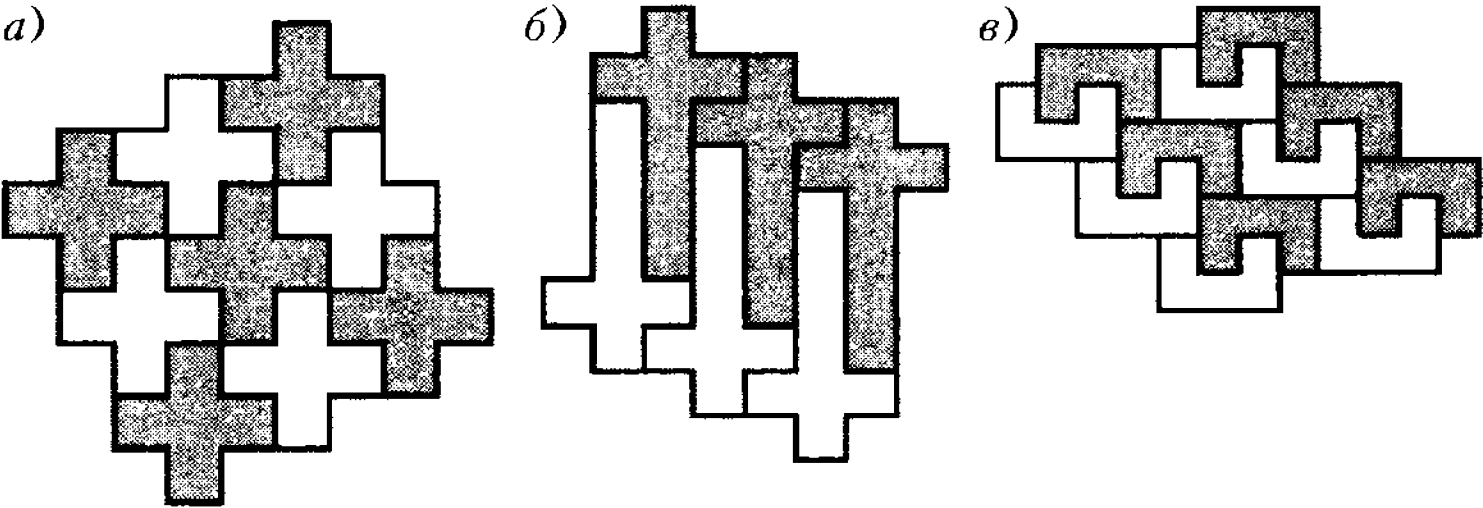


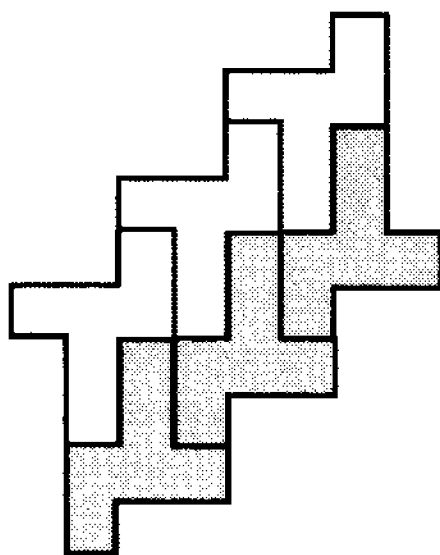
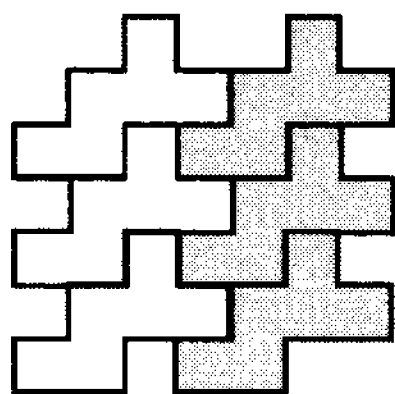
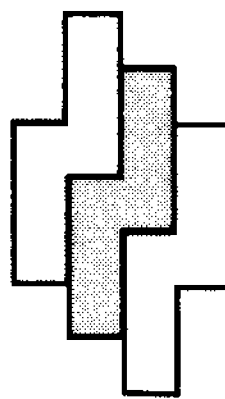
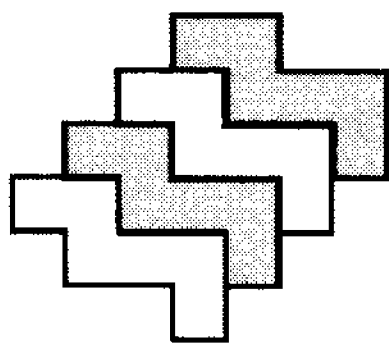
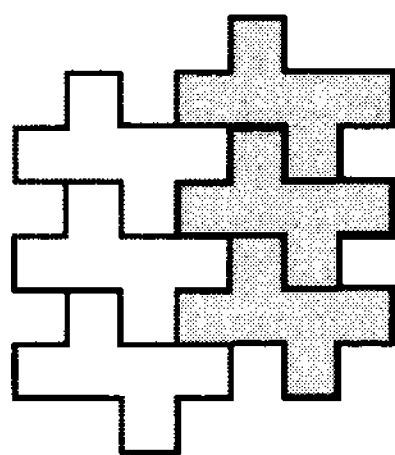
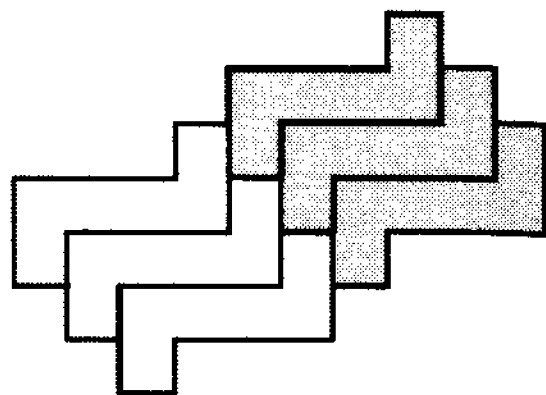
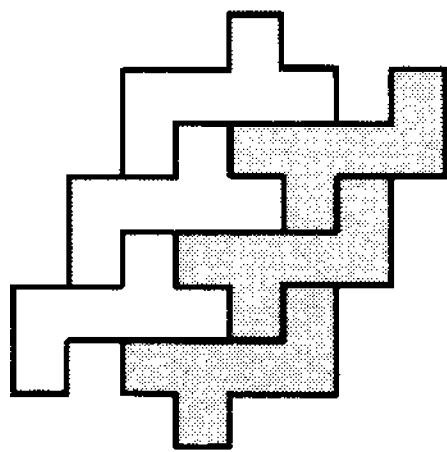
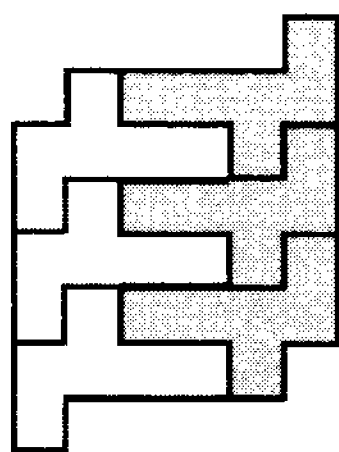
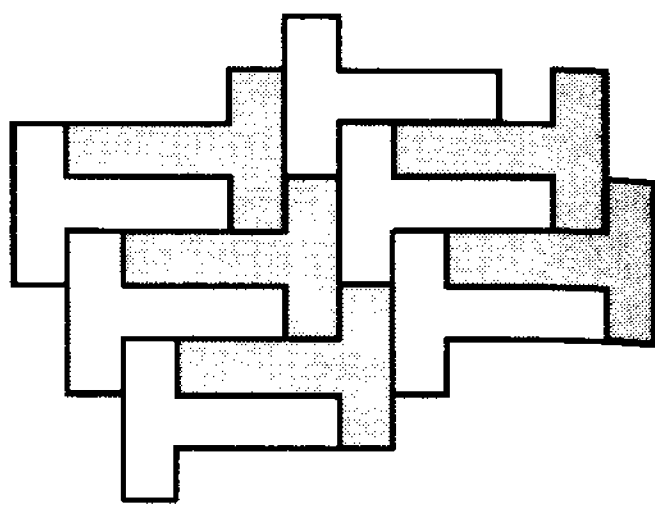
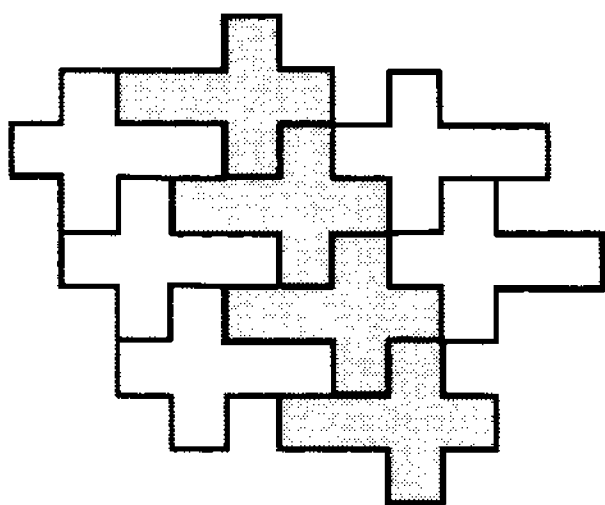
Рис. 53

247. См. рис.54.

248. а) См. рис.55; б) см. рис.56; в) см. рис.57.

249. а) По три окрашенные грани имеют угловые кубики; их 8 штук.

б) По две окрашенные грани у кубиков, расположенных вдоль ребер исходного куба: по три на каждом ребре. Всего у куба 12 ребер; значит, $3 \cdot 12 = 36$ кубиков имеют по две окрашенные грани.



Puc. 54

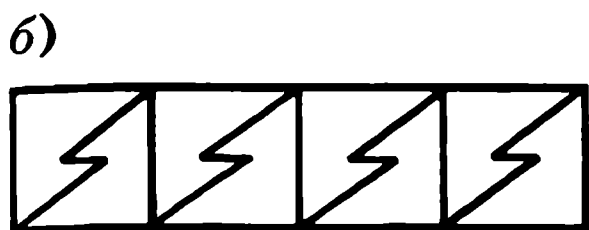
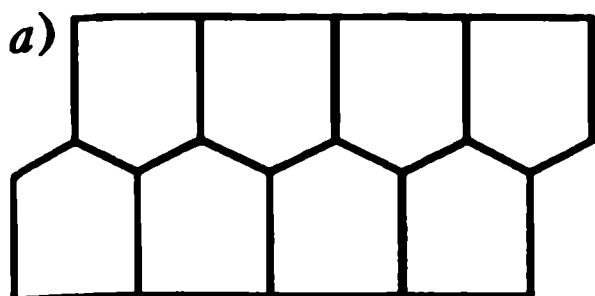


Рис. 55



Рис. 56

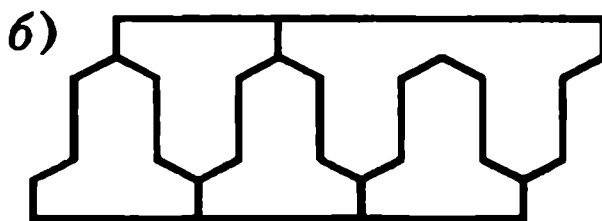
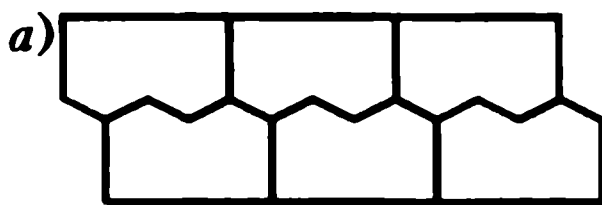


Рис. 57

в) Только одна окрашенная грань у кубиков, которые по 9 штук прилегают к каждой грани исходного куба. Граней у куба 6. Значит, кубиков с одной окрашенной гранью $9 \cdot 6 = 54$.

г) Вовсе неокрашенных кубиков осталось $125 - 8 - 36 - 54 = 27$. (Заметьте: $3^3 = 27$.)

252. а) Из двух уголков можно сделать кирпич размером $3 \times 2 \times 1$. Из шести уголков можно сделать три кирпича. Остается составить слой $3 \times 3 \times 1$ из уголка и шести кубиков. Впрочем, куб можно сложить и из девяти уголков. (Подумайте, как это сделать!)

б) Рассмотрите центральный кубик большого куба. Если удалить кубики из центров граней куба, то центральный кубик не будет граничить ни с каким другим, и, значит, не сможет быть частью уголка.

253. б) 1.

254. а) 45; б) 36.

258. Первые 9 страниц нумеруем однозначными числами, следующие (от 10 до 99) — двузначными.¹ Далее, начиная с 100, используем числа трехзначные. Осталось составить уравнение

$$9 + 90 \cdot 2 + (x - 99) \cdot 3 = 2322,$$

откуда $x = 810$ — искомое число страниц в книге.

Впрочем, можно обойтись и без уравнения: сначала превратим однозначные числа в двузначные, приписав к каждому по одной цифре. Потом все 99 таких чисел превращаем в трехзначные, добавив к каждому по одной цифре. Теперь все числа стали трехзначными, а количество использованных цифр стало равно $2322 + 9 + 99 = 2430$. Осталось разделить 2430 на 3.

¹ Заметьте: двузначных чисел 90 штук, а вовсе не 89.

262. Все лепешки стоят $7 \cdot 3 = 21$ копеек. Значит, лепешка стоит $21 : (4 + 3) = 3$ копейки. Лепешки Петра стоили $3 \cdot 4 = 12$ копеек, из них 7 копеек – стоимость съеденных им лепешек, а остальные 5 копеек он должен получить из уплаченных прохожим денег. (Аналогично, лепешки Ивана стоили 9 копеек; с прохожего он должен получить 2 копейки.)

Любитель дробей мог рассуждать иначе: Иван съел $2\frac{1}{3}$ лепешки, а было у него 3 лепешки. Значит, прохожий взял у него $3 - 2\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ лепешки. Аналогично, у Петра прохожий взял $4 - 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ лепешки. Поскольку деньги надо делить пропорционально потраченным на прохожего продуктам, получаем тот же ответ: $\frac{2}{3} : \frac{5}{3} = 2 : 5$.

263. Первый способ. Старшему брату полагались $3/5$ дома, а он получил дом целиком. Значит, за $2/5$ дома он отдал 800 рублей, т.е. $1/5$ дома стоит 400 рублей, а весь дом – 2000 рублей.

Второй способ. Два младших брата вместе получили $800 \cdot 3 = 2400$ рублей, поэтому каждый из них получил $2400 : 2 = 1200$ рублей. Значит, стоимость всего наследства равна $1200 \cdot 5 = 6000$ рублям, а один дом стоит $6000 : 3 = 2000$ рублей.

265. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.

266. $555 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 5 = 1000$.

267. Может. Например, а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; б) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$.

268. 8 часов утра.

269. В два раза.

270. $9453,5 + 9453,5 = 18907$.

272. Всем досталось поровну.

273. $1/3$.

280. За первые два дня Слава прочел $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ книги, а в третий день – еще $1/3$, тем самым завершив чтение.

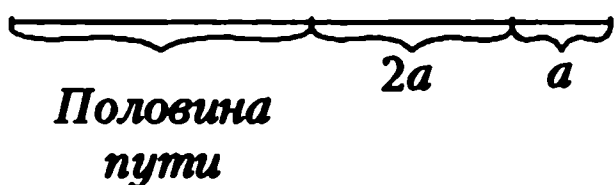


Рис. 58

281. Пусть пассажир перестал смотреть в окно за a км до конца пути. Тогда, глядя в окно, он проехал $2a$ км. Половина пути равна $3a$ км, а весь путь – $6a$ км.

Следовательно, пассажир смотрел в окно $2a / (6a) = 1/3$ часть пути (рис. 58).

282'. Сложим кусок пополам и еще раз пополам. Получим кусок длиной $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$ метра, который и надо отрезать, чтобы остаток равнялся $\frac{1}{2}$ м (ибо $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$).

283. Три яблока разрежем на половинки. Каждое из остальных двух яблок разрежем на 3 равные части. Каждый ребенок получит половину и еще треть яблока.

284. $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$. Я выпил чашку кофе и чашку молока.

285. б) $y = 325,8$.

286. Не обязательно.

289. Рассмотрим три дроби, сумма которых больше 2. Например,
 $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{53}{24}$. В качестве четвертой дроби осталось взять
 $3 - \frac{53}{24} = \frac{19}{24}$.

290. Могут. Например, $22/11$, $21/7$, $20/10$, $19/1$, $18/9$, $16/8$, $15/5$, $14/2$, $12/4$, $6/3$ и $19/17$. (Все 11 дробей не могут иметь целые значения, ибо тогда ни одно из чисел 13, 17 и 19 не могло бы быть в знаменателе, да и в числителе могло бы оказаться только в том случае, когда в знаменателе – число 1.)

291. Умножив числитель и знаменатель первой дроби на 5, видим: первая дробь больше, ибо ее знаменатель окажется меньше знаменателя второй дроби.

293. 12-й ряд Фарея таков: $\frac{0}{1} < \frac{1}{12} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10} < \frac{1}{9} < \frac{1}{8} < \frac{1}{7} <$
 $< \frac{1}{6} < \frac{2}{11} < \frac{1}{5} < \frac{2}{9} < \frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{4}{11} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{5}{12} <$
 $< \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{5}{11} < \frac{1}{2} < \frac{6}{11} < \frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{7}{12} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{7}{11} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} <$
 $< \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9} < \frac{9}{10} < \frac{10}{11} < \frac{11}{12} < \frac{1}{1}$.

296. и) 8100; к) 170.

298. а) 36400; б) 240.

301. Указание. Дроби $\frac{1}{2} \left(= \frac{10}{20} \right)$, $\frac{1}{4} \left(= \frac{5}{20} \right)$ и $\frac{1}{5} \left(= \frac{4}{20} \right)$ составляют в сумме $\frac{19}{20} < 1$.

303. Можно перейти к уравнению

$$\frac{2}{73} - \frac{1}{219} - \frac{1}{292} - \frac{1}{60} = \frac{1}{x}.$$

Поскольку $219 = 73 \cdot 3$ и $292 = 73 \cdot 4$, легко посчитать величину

$$\frac{2}{73} - \frac{1}{219} - \frac{1}{292} = \frac{1}{73} \cdot \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{73} \cdot \frac{24 - 4 - 3}{12} = \frac{1}{73} \cdot \frac{17}{12}.$$

Осталось посчитать разность

$$\frac{17}{73 \cdot 12} - \frac{1}{60} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{17}{73} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{17 \cdot 5 - 73}{73 \cdot 5} = \frac{12}{12 \cdot 73 \cdot 5} = \frac{1}{365}$$

и написать ответ: $x = 365$.

306. а) $x = 9$.

б) $x = -1$. *Указание.* Начните раскладывать 1987 сверху:

$$\begin{aligned} 1987 &= 1 + 2 : \left(\frac{1}{993} \right) = 1 + 2 : \left(1 - \frac{992}{993} \right) = \\ &= 1 + 2 : \left(1 + 32 : \left(-\frac{993}{31} \right) \right) = 1 + 2 : \left(1 + 32 : \left(1 - \frac{1024}{31} \right) \right) = \dots \end{aligned}$$

308. Изначально присутствующих было в 6 раз больше, чем отсутствующих, т. е. отсутствующие составляли $1/7$ часть числа всех учащихся. После выхода одного ученика из класса отсутствующие составили $1/6$ часть от общего числа учащихся.

Значит, один ученик составляет $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ часть класса, а в классе 42 ученика.

309. В 9 часов угол между стрелками равен 90° . За час часовая стрелка проходит $1/12$ часть окружности, т.е. 30° , а за 20 минут — $1/3$ этого угла, т.е. 10° . Аналогично минутная стрелка, проходящая за час 360° , за 20 минут пройдет 120° . Таким образом, угол в 90° уменьшится на 10° и увеличится на 120° , став равным 200° ; дополнительный к нему угол будет равен 160° . *Ответ:* 160° .

310. 36.

311. *Указание.* Автомобилист шел пешком столько же времени, сколько велосипедист затратил на весь путь.

314. *Указание.* Поскольку велосипедист проехал треть пути быстрее, чем мотоциклист проехал две трети, его скорость больше половины скорости мотоциклиста.

315. Один паломник.

316. Четыре кошки.

317. Три гуся в ряд.

318. Достаточно передвинуть куда-нибудь крайнюю спичку (например, положить ее рядом с другой крайней).

319. Подпрыгивая, двигайтесь к берегу!

320. Свет (или спичку, если электричества нет).

321. Да, можно бросить мяч вертикально.

322. Если постараться, из арбуза можно вырезать кусок в виде «столбика», идущего сквозь весь арбуз. У этого куска будут две корки, соединенные арбузной мякотью.

323. Если согласиться с тем, что существуют говорящие черепа-

хи, то вполне возможно, что среди них есть и не очень правдивые. Наверное, одна из них сказала неправду.

324. а) Двух бегемотов. б) Поскольку в машине уже находятся 2 бегемота, то увезти можно еще 8 крокодилов.

326. а) Положите спичку в углу стола, «отрезав» ею треугольник.

б) Две спички положите в углу стола, чтобы края его дали две другие стороны квадрата.

328. Три секунды. За это время они, конечно, поймут, что им никогда не вырыть такой ямы, да и рыть ее незачем. (Подробности – в сказке Памелы Трэверс «Мэри Поппинс».)

329. Когда он стоит на платформе поезда.

331. Скорее всего, нисколько.

332. Большой Зеленый Камнеед.

333. Торговец заработает 2 доллара. Есть несколько способов объяснения. Один из них следующий. Начнем с того, что, продав за 8 долларов вещь, которую перед этим купил за 7 долларов, торговец заработал 1 доллар. Предположим теперь, что вместо того, чтобы вновь покупать ту же самую вещь за 9 долларов и потом продавать ее за 10 долларов, торговец покупает *другую* вещь за 9 долларов и продает ее за 10 долларов. (В самом деле, будет ли эта сделка хоть как-нибудь отличаться от предыдущей с чисто экономической точки зрения? Конечно же, нет!) Поэтому очевидно, что, купив и опять продав эту другую вещь, торговец заработает еще 1 доллар. Следовательно, общая его прибыль составит 2 доллара.

Еще одно крайне понятное доказательство таково: общая сумма расходов нашего торговца составляет $7 + 9 = 16$ долларов, а его полный доход равен $8 + 10 = 18$ долларам, что и дает 2 доллара прибыли.

Для тех, кого не убедили эти рассуждения, предположим, что у нашего торговца с утра имеется в бумажнике определенная сумма денег, скажем 100 долларов, и что в течение дня он совершает только четыре описанные сделки.

Сколько денег окажется у него к концу дня? Пусть, например, он сначала заплатит за свою покупку 7 долларов. Тогда у него останется 93 доллара. Когда он продаст свое приобретение за 8 долларов, у него будет уже 101 доллар. Далее он вновь покупает эту же вещь за 9 долларов, так что у него остается 92 доллара. Наконец, он продает злополучную вещь за 10 долларов и, следовательно, у него оказывается 102 доллара.

Итак, он начал день с сотней долларов, а к вечеру имел 102 доллара. Сколько же он приобрел за день? Конечно же, 2 доллара!

334. 31121314. Каждое следующее число описывает предыдущее: «в числе была одна единица» – 11; «две единицы» – 21; «одна единица, одна двойка» – 1112 и т.д.

335. Всегда получится число 6174, которое переходит само в себя. (Доказать это проще всего, написав программу для компьютера.)

339. 20.

340. 1.

341. 5.

342. 0.5.

344. $1\frac{1}{14}$.

11

11

7

$11 + 11 - 7 = 15$

345. 7.

346. 2.

347. 1.

348. 3.

349. 8.

350. 1.

351. 6.

352. 3.

353. 13.

354. 1.

357. $15 = (11 - 7) + 11$.

Запустим часы одновременно, через 7 минут начнем варить кашу (рис.59).

358.

Ведро, 8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
Бидон, 5 л	–	5	2	2	–	5	4	4
Банка, 3л	–	–	3	–	2	2	3	–

359. С помощью 5-литрового бидона напомним 17-литровый. В 5-литровом останется 3 литра.

17-литровый	0	0	5	5	10	10	15	15	17	0	3	3	8	8	13
5-литровый	0	5	0	5	0	5	0	5	3	3	0	5	0	5	0

Выльем молоко из 17-литрового бидона в цистерну, перельем в него 3 литра из 5-литрового и дольем 10 литров с помощью 5-литрового бидона.

360.

12-ведерная	12	4	4	9	9	1	1	6
8-ведерная	–	8	3	3	–	8	6	6
5-ведерная	–	–	5	–	3	3	5	–

361.

Бак	a	$a - 5$	$a - 5$	$a - 10$	$a - 10$	$a - 1$	$a - 1$	$a - 6$	$a - 6$
Ведро, 8 л	–	–	5	5	9	–	1	1	6
Бидон, 5л	–	5	1	5	1	1	–	5	–

362.

Бочка	α	$\alpha - 9$	$\alpha - 9$	$\alpha - 4$	$\alpha - 4$	$\alpha - 13$	$\alpha - 13$	$\alpha - 8$
9-ведерная	—	9	4	4	—	9	8	8
5-ведерная	—	—	5	—	4	4	5	—

363.

4 л	—	—	4	—	1	1	4	3	—	4	2
5 л	—	5	1	1	—	5	2	2	2	2	2
10 л	10	5	5	9	9	9	9	10	10	6	6
10 л	10	10	10	10	10	5	5	5	8	8	10

368. Один рыцарь.

369. а) Все лжецы. б) Или все лжецы, или три лжеца и шесть рыцарей.

370. Можно спросить: «Эта дорога ведет в ваш город?»

371. Ответили бы утвердительно вы на вопрос: «У вас дома живет ручной крокодил?»

374. В утверждении, что из любых двух министров хоть один продажен, сказано в точности то, что никакие два министра не могут быть честными, т.е. что сразу двух честных министров не найти. Значит, в этом правительстве самое большее один министр честен. Но, согласно условию задачи, один честный министр есть. Стало быть, ровно один честен.

375. Если бы в корзине нашлись 12 груздей, то ни один из них не был бы рыжиком. Поэтому количество груздей не превосходит 11.

Если бы груздей было меньше 11, то их было бы не больше 10. В таком случае можно было бы найти 20 негруздей. Значит, груздей ровно 11. Аналогично, рыжиков — 19.

Ответ: 19 рыжиков и 11 груздей.

377. Если ответ а) верен, то верны все ответы от б) до е), но, если б) верен, получаем противоречие; следовательно, ответ а) ложен. Поскольку ответ в) требует, чтобы а) был верным, то получаем, что в) ложен. Если ответ б) верен, то верен только один из первых трех, т.е. верен г), но тогда г) противоречит б); следовательно, б) ложен. Итак, первые три ответа ложные, и, так как этот факт отрицает г), то г) ложен. Ответ е) не может быть верным: если он верен, то все

ответы от а) до д) должны быть ложными, т. е., подтверждая д), получили противоречие.

Таким образом, правильный ответ – д).

378. Указание. Какое число должно быть на рисунке 60 в клетке а? б? в? ...

17	б	ж		11	г
2		а	25	з	
23	16	1	е	д	в
30	м		19		и
15		л		13	
8		н		к	35

Рис. 60

379. Робинзон может сказать: «Меня съест лев». Если это утверждение истинно, то Робинзона должны есть дикари, и утверждение оказывается ложным.

А если это утверждение ложно, то Робинзона должен есть лев, и оно оказывается истинным.

Поэтому это утверждение не истинно и не ложно, и людоедам, если они не знают логику, придется отпустить Робинзона. (К сожалению, если людоеды занимались математикой, то Робинзону не спастись: они скажут, что произнесенное им предложение – бессмысленный набор слов, а не утверждение!)

381. Путешественник может спросить:

- 1) Равен ли нуль нулю?
- 2) Равна ли единица единице?
- 3) Это город Правдин?
- 4) Это город Лгунов?

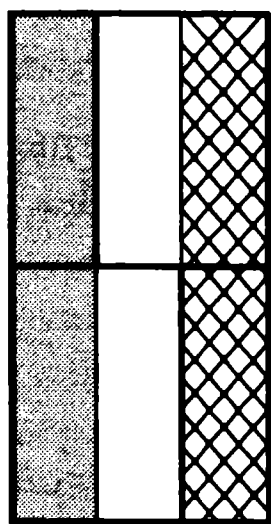
Первые два вопроса позволяют «опознать» собеседника и, если это житель города Переменска – узнать, правду или ложь ответит он на следующий вопрос.

Впрочем, скорее всего, прохожий после первых двух вопросов заподозрил бы вопрошающего в ненормальности и сбежал бы от него. Поэтому можно начать беседу с двух вопросов «Вы из Переменска?». Правдивец два раза ответит «нет», лгун – два раза ответит «да», а житель Переменска ответит по-разному.

Однако два одинаковых вопроса подряд могут вызвать подозрение, что путешественник глухой, а это может привести к ошибке, если спрошенный – житель Переменска (два вопроса могут быть восприняты как один). Поэтому лучше поступить следующим образом. Первый вопрос: «Вы житель Переменска?» Если ответ «да», то спросить: «Вы житель Лгунова?» (В случае утвердительного ответа на второй вопрос прохожий из Переменска, а в случае отрицательного ответа – из Лгунова.) Если же ответ на первый вопрос «нет», то спросить: «Вы из Правдина?» (Здесь утвердительный ответ даст житель Правдина, а отрицательный – Переменска.)

383. Петр подошел вторым, разговор происходил во вторник.

384. Б, 1 и 2. Карточку А не надо переворачивать – что бы ни было у нее на обратной стороне, противоречия не будет. Любая



другая карточка может (если у нее на обороте четное число) опровергнуть утверждение.

387. См. рис.61.

389. 8 кг.

390. 5. Проверка: $4 : 2 + 3 = 5 = 4 \cdot 2 - 3$.

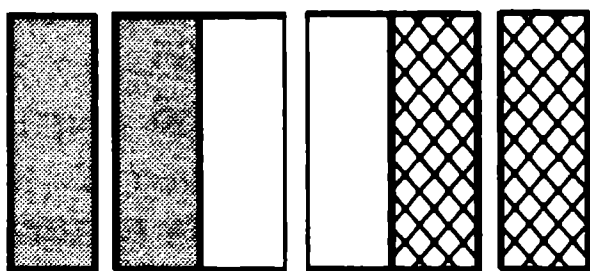


Рис. 61

391. Если кафтан стоит x рублей, то $\frac{7}{12} \cdot (x + 12) = x + 5$, откуда $x = 4,8$.

392. Третий турист, по сравнению с первым, купил лишнюю палатку, заплатив при этом на 50 рублей больше. Следовательно, палатка стоит 50 рублей. Четвертый турист, по сравнению со вторым, купил лишних две палатки, поэтому он заплатил 135 рублей.

394. Если x – первое число, y – второе, то первые шесть чисел суть $x, y, x + y, x + 2y, 2x + 3y$ и $3x + 5y$. Их сумма $8x + 12y = 4(2x + 3y) = 4 \cdot 7 = 28$.

396. 8 орехов.

397. 49 рублей 99 копеек.

400. Лодка стоит 600 рублей, товарищи внесли 200, 150, 120 и 130 рублей.

401. 4 персика, 2 груши и яблоко весят 550 г, персик, 3 груши и 4 яблока – 450 г. Следовательно, 5 персиков, 5 груш и 5 яблок весят 1000 г. Таким образом, персик, груша и яблоко весят вместе 200 г.

402. Можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z + t = 45, \\ x + 2 = y - 2, \\ y - 2 = 2z, \\ 2z = t/2 \end{cases}$$

и решить ее.

Есть и более простой способ – обозначить получающееся число через a , составить уравнение $(a - 2) + (a + 2) + (a/2) + 2a = 45$, найти из него $a = 10$ и получить ответ – четверку чисел 8, 12, 5, 20.

403. Пусть разница во времени между столицей и Энском составляет x часов, а полет продолжался y часов. Из условия задачи составляем уравнения $y - x = 2$ и $y + x = 6$. Отсюда получаем, что $x = 2$ и $y = 4$. Ответ: 4 часа.

404. 3 рубля 75 копеек и 1 рубль 25 копеек.

405. а) Подставив $T_{II} = 0$, получим $b = 32$, а при $T_{II} = 100$ получается $212 = 100a + b$, откуда $a = 1,8$. б) $T = -40^\circ$.

406. См. рис.62.

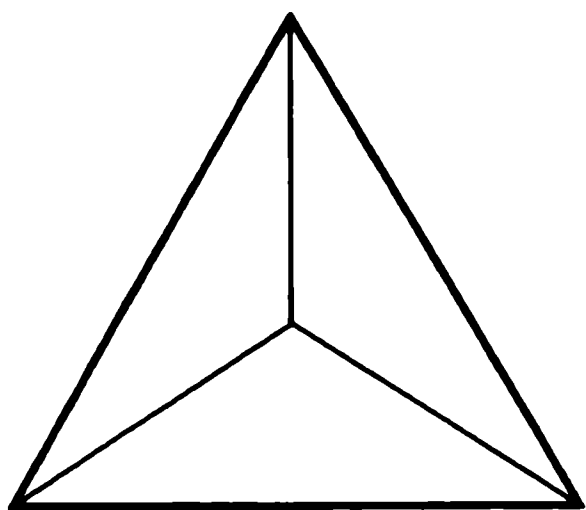


Рис. 62

407. 10.

408. а) 17; б) 35.

409. На рисунке 63 расставлены цифры, а на рисунке 64 наглядно показаны образовавшиеся спирали.

410. См. рис.65.

411. См. рис.66.

412. 2 раза.

413. Поскольку половина персиков составляла треть объема банки, половина оставшихся персиков составляет

шестую часть первоначального объема. Осталось сообразить, какую часть составляет $1/6$ от $2/3$. Для этого достаточно вспомнить, что

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}. \text{ Ответ: на четверть.}$$

2	3	3	3	3	3	3	3
2	3	4	4	4	4	4	4
2	3	4	1	1	1	1	4
2	3	4	1	2	2	1	4
2	3	4	4	3	2	1	4
2	3	3	3	3	2	1	4
2	2	2	2	2	2	1	4
1	1	1	1	1	1	1	4

Рис. 63

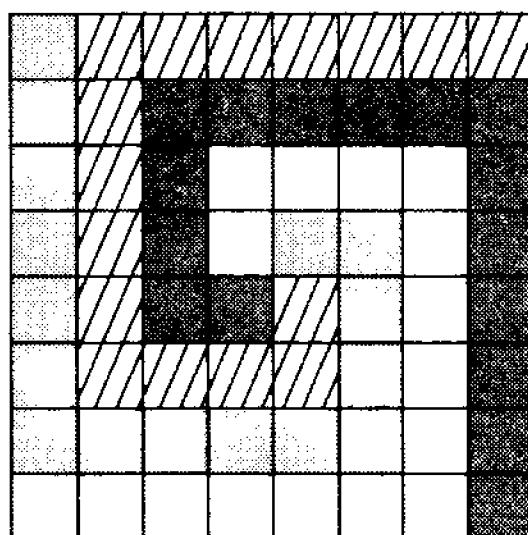


Рис. 64

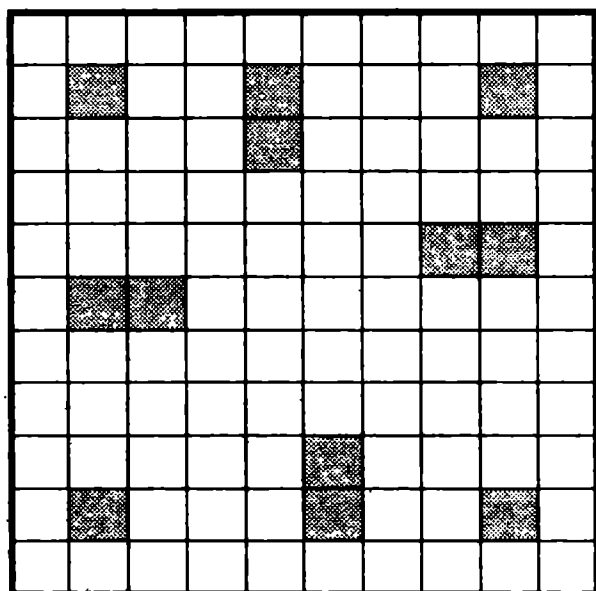


Рис. 65

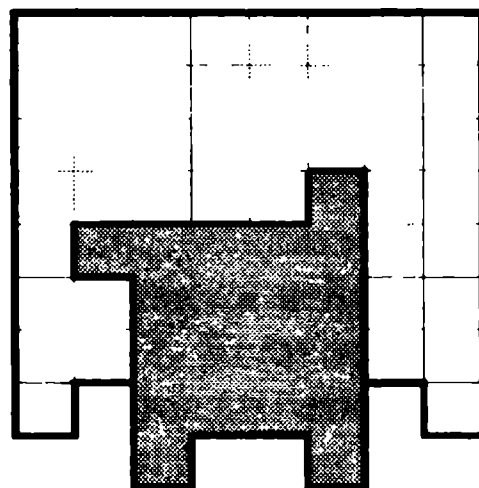


Рис. 66

414. Если большой луг полдня косила вся артель и полдня его докашивала половина артели, то ясно, что в полдня пол-артели скашивает $1/3$ луга. Следовательно, на малом лугу остался недоко-

шенным участок в $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Если один косец в день скашивает $1/6$ луга, а скошено было $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$, то косцов было 8.

416. Буквы первой строки имеют вертикальную ось симметрии, буквы второй – горизонтальную, буквы третьей строки не имеют ни осей, ни центров симметрии, буквы четвертой строки имеют и вертикальную, и горизонтальную оси симметрии, а буквы пятой строки не имеют осей симметрии, но центр симметрии имеют.

417. *Указание для новых русских.* 23 рубля нельзя заплатить пятерками и семерками.

418. См. рис.67.

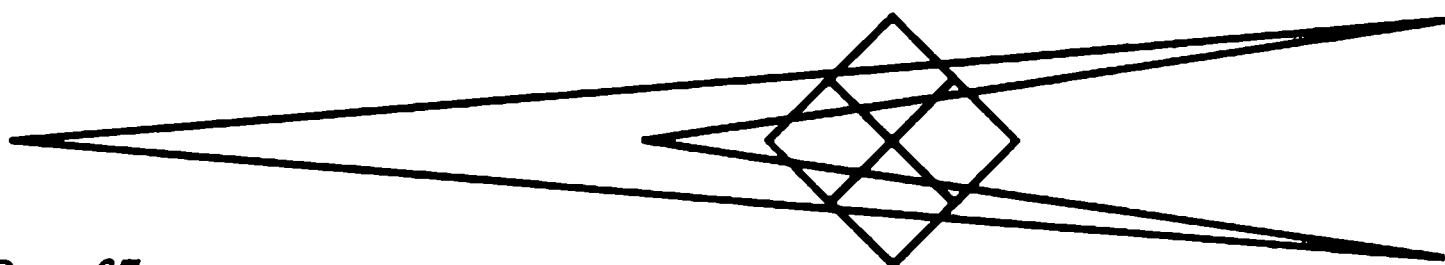


Рис. 67

419. По условию, самый правый – Шарик. Пересадим его между котом и дядей Федором, тогда кот будет слева от всех. Справа от него будет Шарик, затем дядя Федор. Печкину остается место справа от всех. Пересадим Шарика обратно и получим слева направо: Матроскин, дядя Федор, Печкин, Шарик.

421. $(138 : 23) \cdot 100 = 600$ страниц.

422. Мальчики составляют $\frac{357}{700} \cdot 100 = 51\%$ от числа учащихся школы.

424. Если число тетрадей первой стопки составляет 60% числа тетрадей второй стопки, то, обозначив через x число тетрадей второй стопки, получим, что в первой стопке $\frac{3}{5}x$ тетрадей. Таким образом, в двух стопках вместе $x + \frac{3}{5}x = \frac{8}{5}x$ тетрадей. Осталось решить уравнение $\frac{8}{5}x = 80$.

426. Не изменится, ибо сначала цену умножат на 2, а потом разделят на 2.

427. $1,5 \cdot 0,5 = 0,75$.

430. На 4% дешевле. Если цену картофеля до повышения принять за 100 частей, то после повышения она составила 120 частей, а после снижения на 20% цена уменьшилась на $120 \cdot (20/100) = 24$ части и стала равна $120 - 24 = 96$ частям, т.е. составила 96% исходной цены.

Вычисления проще было провести так: $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$. (Обяза-

тельно поймите, почему умножить на 1,2 – значит увеличить на 20%, а умножить на 0,8 – уменьшить на 20%.)

Пояснение для будущих финансистов. 20%, на которые цена повысилась, вычислялись от исходной цены, а 20%, на которые цена понизилась, вычислялись от повышенной цены. Поэтому естественно, что повысилась цена на меньшую величину, чем понизилась.

430'. Примем шаг высокого за 1 часть. Тогда шаг низкого составит $4/5$ части. На каждые 100 шагов высокого приходится 120 шагов низкого, поэтому за то время, когда высокий пройдет путь в $100 \cdot 1 = 100$ частей, низкий пройдет путь в $120 \cdot (4/5) = 96$ частей, так что низкий идет медленнее.

431. На каждых 10 м бега бегуна *В* бегун *С* отстает от него на 1 м. Поэтому, когда *А* финишировал, *В* отставал от *А* на 10 м, а *С* отставал от *В* на 9 м. Значит, *С* отставал от *А* на 19 м.

Иначе говоря, *В* бежит в $9/10$ раза медленнее *А*; *С* – в $9/10$ раза медленнее *В*. Поэтому *С* бежит в $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{100}$ раза медленнее, чем *А*, т.е. отстанет на 19 м.

431'. $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$.

432. $0,75 \cdot 1,2 \cdot 0,9 \cdot 1,2 = 0,972$. *Ответ:* похудел на 2,8%.

434. В 40 кг морской воды содержится $40 \cdot 0,035 = 1,4$ кг соли, что будет составлять 0,5% от новой массы. Если 0,5% – это 1,4 кг, то 1% – это 2,8 кг, а вся новая масса – 280 кг. Значит, следует добавить $280 - 40 = 220$ кг пресной воды.

435. 90%.

436. 50%. Если Боря собрал 12 грибов, то Алик собрал 10, а Вася – 15.

Для Премудрой Совы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик. Значит, Боря собрал в 1,2 раза больше грибов, чем Алик. Поскольку Боря собрал на 20% меньше грибов, чем Вася, Боря собрал 0,8 от собранного Васей количества грибов, т.е. Вася собрал в $1 : 0,8 = 1,25$ раз больше, чем Боря. Вспоминая, что Боря набрал в 1,2 раза больше, чем Алик, заключаем: Вася набрал грибов в $1,2 \cdot 1,25 = 1,5$ раз больше, чем Алик.

437. Из n участников Миша составляет $\frac{100}{n}$ %. Если $\frac{100}{n} < 7$, то $n > \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$. *Ответ:* 15.

439. $1/12$.

441. $1 - 0,51 = 0,49 = 0,7 \cdot 0,7$. *Ответ:* на 30%.

442. б) После того как из бака в первый раз отлили a литров кислоты и долили его водой, в баке осталось $(729 - a)$ литров чистой кислоты. Теперь в одном литре раствора содержится $(729 - a)/729$ литров кислоты. При втором выливании из бака удаляется

$a(729 - a)/729$ литров кислоты, и в баке остается уже только

$$729 - a - a \cdot \frac{729 - a}{729} = \frac{(729 - a)^2}{729}$$

литров кислоты. Третье выливание уменьшает количество кислоты в баке еще на $a(729 - a)^2/729^2$ литров, и остается

$$\frac{(729 - a)^2}{729} - a \cdot \frac{(729 - a)^2}{729^2} = \frac{(729 - a)^3}{729^2}$$

литров кислоты.

Нетрудно догадаться, что в баке после шестой операции должно быть $(729 - a)^6/729^5$ литров кислоты. Но эта догадка, конечно, не заменяет доказательства. Для полной строгости приведенные рассуждения следовало бы повторить шесть раз. Уравнение

$$\frac{(729 - a)^6}{729^5} = 64$$

можно записать в виде

$$\frac{(729 - a)^6}{(3^6)^5} = 2^6.$$

(Мы воспользовались тем, что $2^6 = 64$ и $3^6 = 729$.) Следовательно, $\frac{729 - a}{3^5} = 2$, откуда $a = 243$.

443. На 50%.

444. После первого перехода Джеймсу осталось пройти $2/3$ пути, после второго перехода — $2/3$ остатка, т.е. $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ пути, а после третьего перехода — $\frac{2}{3}$ нового остатка, т.е. $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ всего пути. Отсюда 32 км составляет $8/27$ всего пути, а весь путь равен 108 км.

445. 1000 рублей.

446. 72.

447. Указание. Примем денежку за единицу, стоимость хлеба обозначим через x , а стоимость кваса — через y . Составим уравнения: до повышения цен $x + y = 1$, а после повышения $1,2(0,5x + y) = 1$. Значит, $0,6x + 1,2y = 1$. Теперь легко найти x и y , а затем посчитать $1,2 \cdot 1,2y$ — стоимость кваса после двух повышений цен.

448. 211.

449. См. рис.68.

450. 84210, 94210 или 95210.

451. 6) У дракона было 6 или 44 ног. (В первом случае 8 драконов и 15 сороконожек, во втором – 12 драконов и 3 сороконожки.)

453. Может (рис.69).

454. Первая цифра числа, удовлетворяющего условию задачи, не может быть равна 1, 3, 5, 7, 8. Если это число начинается с цифры 2, то вторая цифра его равна 3 и дальше «продолжить» это число нельзя. Если оно начинается с 4, то «продолжается» единственным образом – 46923,

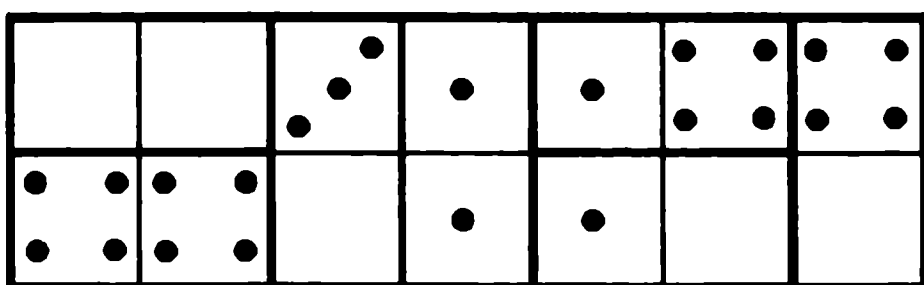


Рис. 68

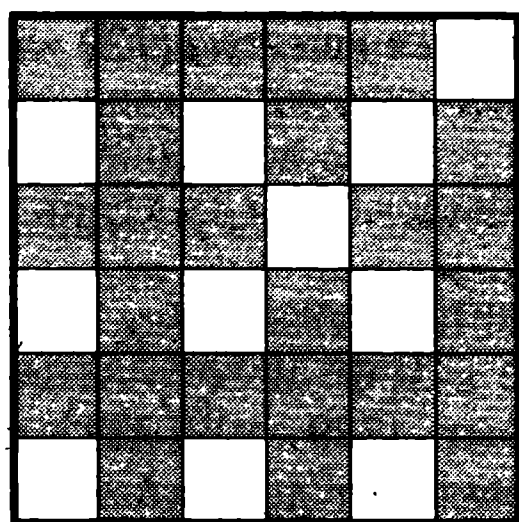


Рис. 69

если же его первая цифра равна 6 или 9, то оно равно 6923 или 923. Итак, данное число может иметь не больше 5 цифр. Заметьте, что в процессе решения мы нашли все числа, удовлетворяющие условию задачи.

455. Да, существуют. Например, 65.

На вопрос задачи мы ответили. Как можно найти число 65 – с точки зрения чистого математика, вопрос праздный. Но все-таки хочется подробнее в этом разобраться, найти не «например, 65», а все такие числа. Для этого выпишем последовательность квадратов: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ..., и будем искать квадраты, разность между которыми равна 32. Разность соседних квадратов нечетна. Поэтому легко понять, что подходят только указанные в условии задачи квадраты 16 и 36 и еще квадраты 49 и 81.

Для Премудрой Совы – другое решение. Обозначим искомое число через x . Тогда $x + 16 = n^2$, $x - 16 = k^2$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $n^2 - k^2 = 32$, т.е. $(n - k)(n + k) = 32$. Поскольку $32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, осталось рассмотреть три случая:

$$\begin{cases} n - k = 1, \\ n + k = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} n - k = 2, \\ n + k = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} n - k = 4, \\ n + k = 8. \end{cases}$$

Первый случай отпадает, так как числа получаются нецелые: $n = 33/2$, $k = 31/2$. Во втором случае получаем $n = 6$, $k = 7$, $x = 65$. В третьем случае $n = 6$, $k = 2$, $x = 20$. Таким образом, только числа 20 и 65 обладают указанным свойством.

456. Перечислим основные идеи решения:

- 1) Отметим начальную и конечную буквы, после чего вычеркнем букву **а** правого верхнего угла.
- 2) Буква **у** единственная, значит, через нее проходит путь. Отметим ее.
- 3) Если отмеченная буква имеет только двух соседей, то путь проходит и через этих соседей («вход-выход»).
- 4) Если буква имеет только одного соседа («тупик»), то путь не может через нее проходить.
- 5) Если буква отмечена, то другие ее повторения надо вычеркнуть, а если буква осталась только в единственном месте, то ее надо отметить.

Ответ – на рисунке 70.

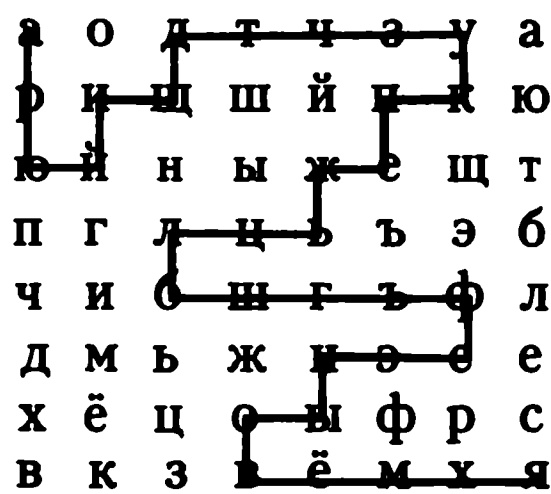


Рис. 70

	a	b	c	d	e
5	Б				
4	Ч	К			
3		Ж	З		
2					
1					

Рис. 71

457. Закрасим сразу целый блок белой, черной, красной, желтой и зеленой красками, как показано на рисунке 71. Разумеется, мы ничуть не рискуем: любая соответствующая условию задачи раскраска этого блока будет отличаться от нашей лишь выбором цветов. Поскольку клетка **а3** находится на одной вертикали с белой и черной клетками и на одной горизонтали с желтой и зеленой, она не может быть окрашена ни в один из этих цветов и потому должна быть красной. Поскольку в «верхнем» блоке (точнее говоря, в блоке, образованном клетками **b5, c5, d5, c4, d4**) должна быть красная клетка, причем не на четвертой, а на пятой горизонтали², мы видим, что красной клетке «правого верхнего» блока³ некуда деться, кроме как на **d2**. Значит, красная клетка «верхнего» блока – это обязательно **c5**. Для последней, пятой красной клетки доски остается единственное поле – **e1**.

Б	З	К	Ч	Ж
Ч	К	Б	Ж	З
К	Ж	З	Б	Ч
З	Ч	Ж	К	Б
Ж	Б	Ч	З	К

Рис. 72

² На четвертой горизонтали уже есть красная клетка **c5**.

³ Состоящего из клеток **d2, d3, e3, e4, e5**.

Теперь займемся черным цветом. В «верхнем» блоке есть две возможности: b5 и d5. Но, закрасив в черный цвет b5, мы никак не сможем покрасить черным ни одной клетки «левого нижнего» блока. Значит, черная клетка – не b5, а d5. Цвет клетки b5 теперь тоже можно определить: зеленый, ибо на одной горизонтали с ней находятся белая и черная, а на одной вертикали – красная и желтая. Теперь очевиден цвет клетки e5, и т.д. В конце концов получаем (совершенно однозначно!) ответ (рис.72).

460. $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

461. Например, так: $5 : 5 + (5 - 5) \cdot 5 = 1$; $(5 + 5) : 5 + 5 - 5 = 2$; $(5 \cdot 5 - 5 - 5) : 5 = 3$; $5 - 5 : 5 + 5 - 5 = 4$; $5 + (5 - 5) \cdot (5 + 5) = 5$; $5 + 5 : 5 + 5 - 5 = 6$; $5 + 5 : 5 + 5 : 5 = 7$; $5 + (5 + 5 + 5) : 5 = 8$; $(5 \cdot 5 - 5) : 5 + 5 = 9$.

462. $4 + 4 - 4 - 4 = 0$; $4 : 4 + 4 - 4 = 1$; $4 : 4 + 4 : 4 = 2$; $(4 + 4 + 4) : 4 = 3$; $(4 - 4) \cdot 4 + 4 = 4$; $(4 + 4 \cdot 4) : 4 = 5$; $4 + (4 + 4) : 4 = 6$; $4 + 4 - 4 : 4 = 7$; $4 + 4 + 4 - 4 = 8$; $4 + 4 + 4 : 4 = 9$; $(44 - 4) : 4 = 10$.

463. $5 \cdot 5 + 5 : 5 = 26$; $(5 : 5 + 5) \cdot 5 = 30$; $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 50$; $55 + 5 - 5 = 55$; $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 = 120$; $5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 = 130$; $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; $555 : 5 = 111$.

464. а) В таблице представлено два типа числительных: для одного характерно окончание *-цу*, он встречается в левой части и только раз – в правой; числительные второго типа всегда имеют последовательность букв *дзю*, они встречаются только в правой части. Видимо, в японском языке однозначные и двузначные числа записываются по-разному: однозначные кончаются на *-цу*; в двузначных элемент *дзю*, видимо, значит «десять», а из элементов, стоящих до и после *дзю*, один (пока неясно какой) обозначает число десятков, другой – число единиц. Если *яцу* меньше десяти, то *футацу* × *ёцу* = *яцу* может соответствовать только одному из равенств $2 \times 3 = 6$, $3 \times 2 = 6$, $2 \times 4 = 8$, $4 \times 2 = 8$. Числительные *нидзюсити* и *ситидзюни* обозначают пару чисел, число десятков каждого из которых равно числу единиц другого. Так как *яцу* – 6 или 8, таких пар может быть лишь две: 45 и 54, 27 и 72. *Нидзюго* обозначает число, большее десяти, являющееся квадратом числа *ицуцу*, которое не меньше четырех. Отсюда *ёндзю* не меньше 20, значит, *ён* здесь обозначает число десятков, и следовательно, в двухзначных числах в японском языке, как и в русском, сначала идут десятки, потом единицы. Так как *яцу* – 6 или 8, то *ицуцу* – 5, *ни* – 2, *го* – 5, *сити* – 7. Тогда *яцу* – 8, *коконоцу* – 9, *мицу* – 3, *ён* – 4. *Дзюхати*, видимо, число второго десятка. Из элементов двухзначных чисел, которые могут обозначать число единиц числа второго десятка, кратного трем, у нас отсутствует лишь 8, отсюда

хати – 8, *муцу* – 6. *Ёцу* – либо 2, либо 4, но так как *ёну*, умноженное на однозначное число, – 32, то *ёцу* – 4, а *футацу* – 2.

Теперь можем заполнить пустые клетки:

коконоцу × *муцу* = *годзюён*

коконоцу × *коконоцу* = *хатидзюити* (*ити* – 1)

ёцу × *яцу* = *сандзюни*.

Наличие разных типов числительных в японском языке объясняется тем, что числительные до десяти – исконно японские, а при счете свыше десяти используются числительные, заимствованные из китайского языка.

б) Можно предположить, что в числительных с гласной *о* в середине слова первая часть слова обозначает единицы, а вторая часть слова (после соединительной гласной) обозначает десятки. Тогда первое равенство можно трактовать двояко: $5 \times 5 = 25$ или $6 \times 6 = 36$. В пользу первого варианта говорит, в частности, то обстоятельство, что обозначение числа 6 в датском языке скорее *seks* (англ. *six*, нем. *sechs*), чем *fem*. Если *fem* – 5, *seks* – 6, тогда *tyve* – 20.

Очевидно, десятки обозначаются путем умножения двадцати, а элемент *sins* служит своего рода знаком умножения. Рассматривая третье и четвертое равенство, а также учитывая схожесть элемента *tre* с рус. *три*, англ. *three*, франц. *trois*, нем. *drei* и т.д., можно предположить, что *tresinstyve* – 60 («трижды двадцать»), *firsinstyve* – 80 («четырежды двадцать»). Тогда легко находим неизвестные: *niden* – 19, *femden* – 15, следовательно, элемент *-den* соответствует русскому *-надцать*; *ni* – 9.

Рассмотрим теперь второе равенство. Его арифметический смысл теперь нам ясен: $84 + 6 = 90$. Число 90 обозначено так: «пятью двадцать» и еще элемент *hal-* вначале; значит, *hal-* требует вычитания десяти (т.е. половины двадцатки). Таков способ обозначения чисел с нечетным числом десятков.

Теперь мы можем заполнить пропуски в последних трех равенствах:

treden + *seksden* = *niotyve* (13 + 16 = 29);

seks × *ni* = *fireohaltresinstyve* (6 × 9 = 54);

niotresinstyve + *fireotyve* = *treohalfemsinstyve* (69 + 24 = 93).

Эта задача дает пример так называемой двадцатеричной системы числительных.

465. а) Нет; б) да. 1687392 – единственное такое число.

467. THIS = 1974, 1987, 2974, 2987, 5987 или 7962.

468. а) КРОСС = 35977; б) ДУРАК = 51286; в) ОДИН = 6823.

469. а) EINS = 1049; б) КАФТАН = 364768 или 364768;
в) КНИГА = 28375; г) СОТНЯ = 54173; д) АИСТ = 1354; е) АИСТ = 1263; ж) АРШИН = 47356, з) EINS = 1329.



489. 10. Выпишем все цифры в порядке убывания: 9876543210. Чтобы получить девятизначное число, нужно убрать одну цифру. Это можно сделать 10 способами.

491. Для перечисления всех удовлетворяющих условию задачи чисел рассмотрим три случая.

1) Число начинается на цифру 5. Вторую цифру (т.е. разряд десятков) можно выбрать девятью способами, после чего третью цифру (разряд единиц) можно выбрать также девятью способами. Следовательно, в этом случае мы получаем $9 \cdot 9 = 81$ число.

2) Цифра 5 – в разряде десятков. Первую цифру можем выбрать восемью способами, а третью – девятью способами, и поэтому таких чисел $8 \cdot 9 = 72$.

3) Цифра 5 – в разряде единиц. Таких чисел 72.
Общее количество интересующих нас чисел равно $81 + 72 + 72 = 225$.

496. Математиков в 10, а философов в 100 раз больше, чем людей, одновременно являющихся и математиками, и философами. Значит, философов в 10 раз больше, чем математиков.

498. а) $1000 - \left[\frac{1000}{3} \right] - \left[\frac{1000}{5} \right] + \left[\frac{1000}{15} \right] = 1000 - 333 - 200 +$
 $+ 66 = 533;$

б) $1000 - \left[\frac{1000}{2} \right] - \left[\frac{1000}{3} \right] - \left[\frac{1000}{5} \right] + \left[\frac{1000}{2 \cdot 3} \right] + \left[\frac{1000}{2 \cdot 5} \right] +$
 $+ \left[\frac{1000}{3 \cdot 5} \right] - \left[\frac{1000}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] = 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 -$
 $- 33 = 266.$

499. Количество шестизначных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры, равно $5^6 = 15625$. Всего шестизначных чисел 900000. Поэтому количество шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра, равно $900000 - 15625 = 884375$.

501. 15 лет. Когда Сережа станет втрое старше Вовы, разность их возрастов будет равна удвоенному возрасту Вовы. Поскольку разность возрастов не меняется со временем, она всегда равна $11 - 1 = 10$ годам. Значит, Вове будет 5 лет, а Сереже – 15.

502. Возрасты детей: 8, 6, 4 и 2 года. Им вместе $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ лет. Каждый год возраст отца увеличивается на 1 год, а сумма возрастов детей – на 4 года. Через $(35 - 20) : (4 - 1) = 5$ лет отцу исполнится 40 лет, а детям вместе – столько же ($13 + 11 + 9 + 7$).

503. $13 + 7 = 20$ лет назад я был вдвое моложе, чем сейчас. Следовательно, мне 40 лет.

504. а) Разница возрастов отца и сына равна $27 - 3 = 24$ годам.

Сейчас отцу втрое больше лет, чем сыну. Поэтому 24 года – это удвоенный возраст сына. *Ответ:* сыну 12 лет, отцу – 36 лет.

505. Через 5 лет. Сейчас Махмуду 10 лет, а Абдулле 40. Разность их возрастов (30 лет) станет удвоенным возрастом Махмуда, когда ему будет 15 лет.

506. Сыну 10 лет, отцу 40 лет. *Первый способ.* Разность возрастов отца и сына не меняется со временем. Сейчас она составляет 3 возраста сына, а через 20 лет – один новый возраст сына. Но новый возраст – это старый возраст плюс 20 лет. Итак, три возраста сына есть возраст сына и 20 лет, откуда 20 лет – это 2 возраста сына.

Второй способ. Пусть сыну x лет. Тогда отцу $4x$ лет. Через 20 лет сыну будет $x + 20$ лет, а отцу $4x + 20$. Значит, $2(x + 20) = 4x + 20$, откуда $x = 10$.

507. *Указание.* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$ и $100 : \frac{25}{12} = 48$.

508. а) Москва основана в 1147 году, Петербург – в 1703 году.

509. Сын моложе отца на возраст дочери и – по условию – на 20 лет. Значит, дочери 20 лет, откуда сыну 40 лет, а отцу 60 лет.

511. Старшая – Таня, младшая – Галя.

512. Им по 6 лет.

514. 20 лет. Пусть Зульфие сейчас x лет, а Минисе – y . По условию, $x + y = 35$. Когда Зульфие было столько, сколько сейчас Минисе (т.е. y лет), Минисе было $y - (x - y) = 2y - x$ лет, что по условию равно $x/2$. Решив полученную систему уравнений, получим $x = 20$, $y = 15$.

518. Диагональ, которая на глаз кажется прямой, на самом деле вовсе не линия, а очень узкий параллелограмм, площадь которого как раз равна площади одной клетки.

519. Это не треугольники!

520. См. рис.74.

522. $60 \text{ км/ч} = 1 \text{ км/мин}$. Бесконечно быстро двигаться нельзя, выиграть по 1 минуте не удастся.

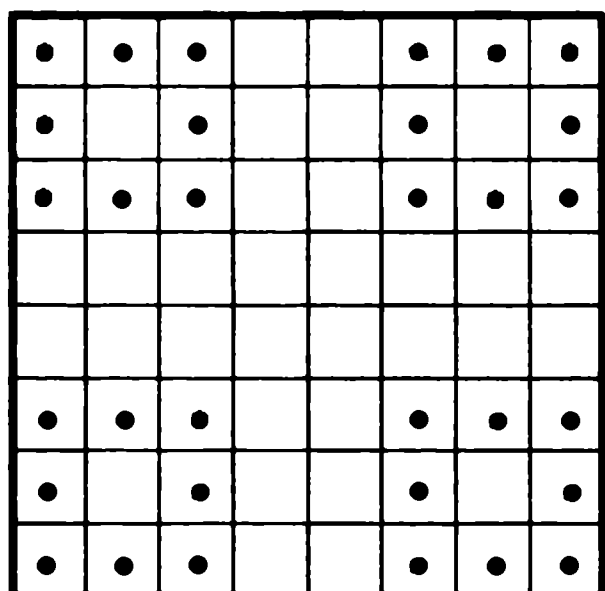


Рис. 74

523. $10 : (8 - 7) = 10$.

524. $40 : (45 - 40) = 8$.

525. Через 4 недели.

528. 450 кубометров.

531. 40 км/ч. *Указание.* Составьте и решите уравнение $10x = 8(x + 10)$.

532. 480 км. Составьте и решите уравнение $7\left(\frac{x}{10} + \frac{x}{12}\right) - x = 136$.

533. 19 км/ч.

534. Скорость первого автомобиля больше скорости второго в 2,5 раза.

536. Два часа двадцать минут.

537. Четыре с половиной часа.

Указание. Рассмотрите уравнение

$$\frac{s/2}{v} - \frac{s/2}{v + \frac{1}{4}v} = \frac{1}{2}.$$

538. На блуждания из-за ручки Петя потратил $8 + 10 = 18$ минут. Поэтому к моменту, когда он вспомнил о забытой ручке, он шел уже 9 минут, т.е. прошел $9/10$ пути.

539. Ослик пробегает $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$ моста за время, в течение которого автомобиль проезжает мост. Поэтому Иа-Иа бежит со скоростью $60 : 4 = 15$ км/ч.

540. По своим ходикам Пух определил, сколько времени отсутствовал. Если из этого времени вычесть время, которое он пробыл в гостях, то получится время, потраченное на ходьбу. Разделив его пополам, Пух узнал, сколько времени понадобилось, чтобы добраться домой. Осталось только прибавить это время к моменту окончания визита.

541. См. рис.75.

542. См. рис. а) 76; б) 77; в) 78.

543. Птичка скушает вдвое больше.

544. Разделим копну на 6 одинаковых частей. За сутки лошадь съест 3 части, корова — 2, а овца — 1 часть.

(Иными словами, за 6 дней лошадь съест 3 копны, корова — 2, а овца — 1.)

545. За сутки три жернова вместе смололи бы $60 + 54 + 48 = 162$ четверти зерна. 81 — это половина от 162.

546. За 6 минут. Малыш за 1 минуту съедает 100 г варенья, а Карлсон — 200 г. Вместе за минуту они съедают 300 г варенья.

547. Через 8 часов.

549. $x : \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5} \right) = x : \left(\frac{2}{15}x \right) = 7,5$ часов.

550. 10 минут.

551. 3 часа 45 минут.

552. 20 дней и 30 дней.

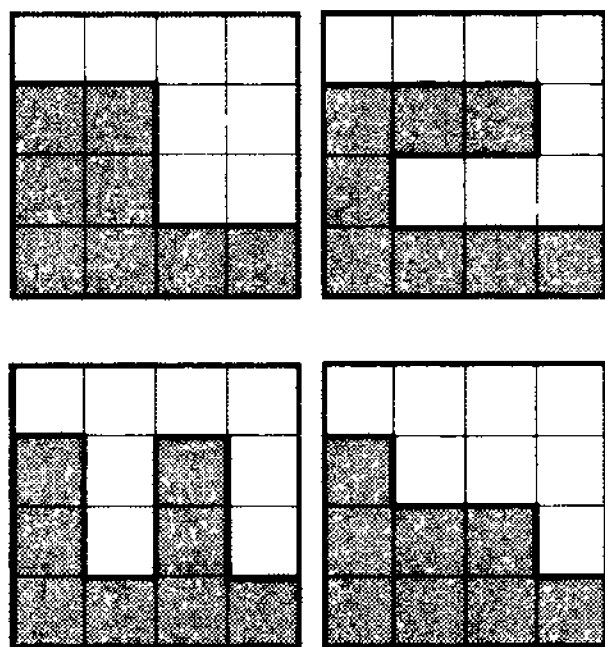


Рис. 75

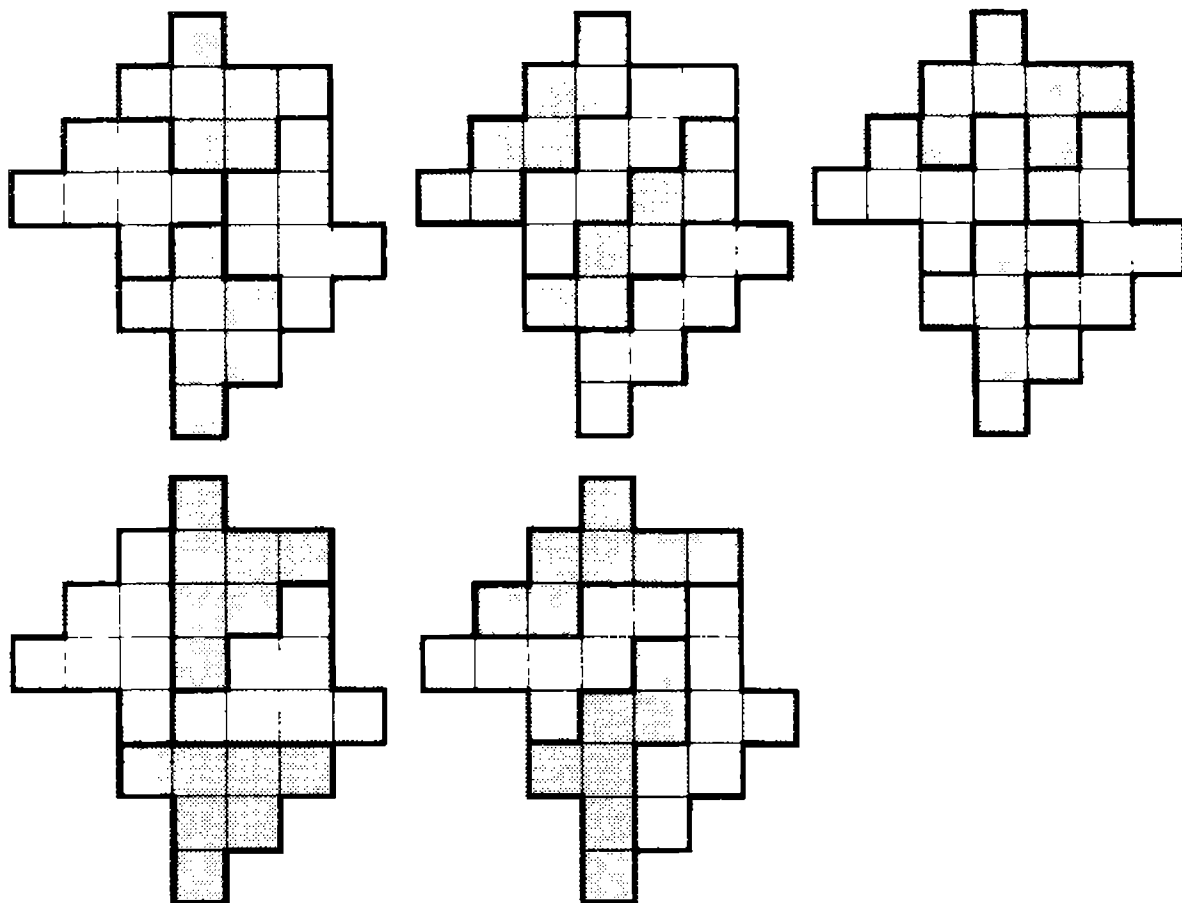


Рис. 76

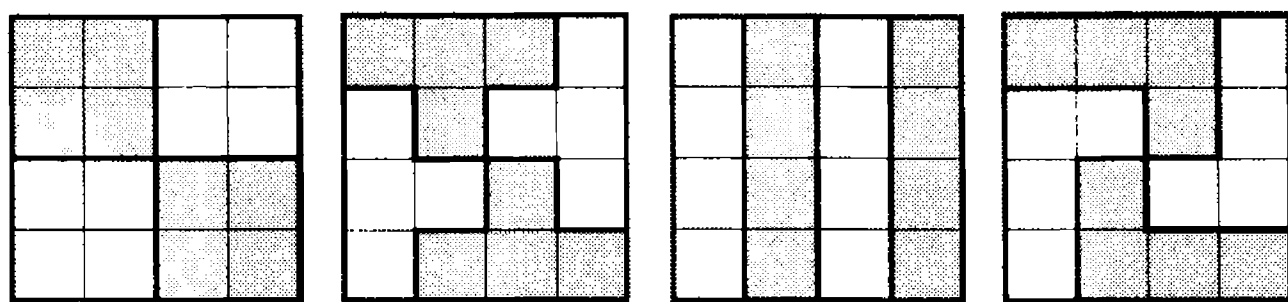


Рис. 77

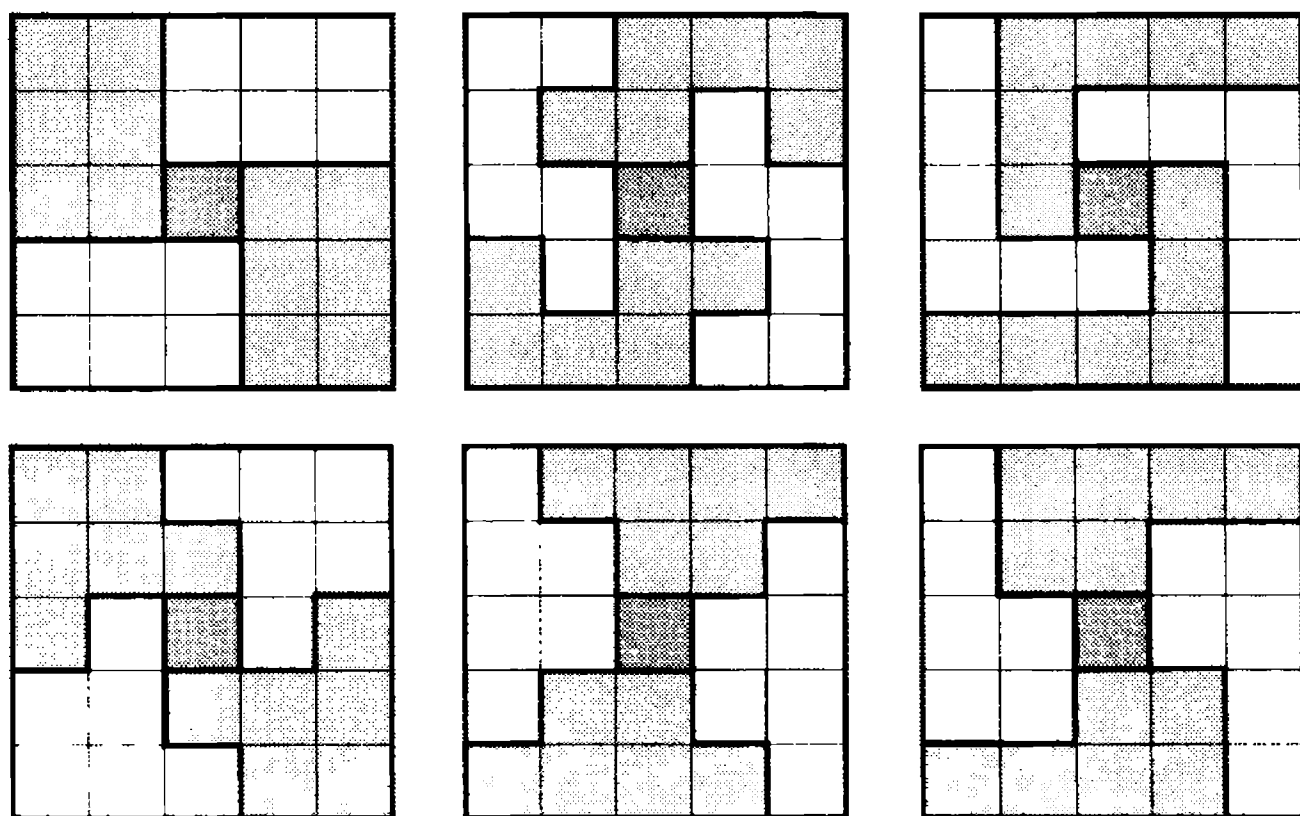


Рис. 78

553. В 2,5 раза. Если бы все время копали все трое, то они выкопали бы $1 + 3 \cdot 0,5 = 2,5$ канавы.

554. В 1,4 раза быстрее.

555. За четыре часа.

557. За день коза и корова съедают $1/45$ часть воза, корова и овца — $1/60$, а овца и коза — $1/90$. Поэтому за день две козы, две коровы и две овцы съедают $\frac{1}{45} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90} = \frac{4 + 3 + 2}{180} = \frac{1}{20}$ воза. А одна коза, одна корова и одна овца съедают за день $1/40$ воза. *Ответ:* за 40 дней.

558. Наша Таня громко плачет, уронила в речку мячик. Тише, Танечка, не плачь, не утонет в речке мяч.

559. У ковбоя в горле застряла кость и от испуга выскочила.

560. Он гадал: «любит — не любит...»

561. Дед Щукарь начал работать в пятницу; во вторник в суп попала одна лягушка.

562. $(66 + 4) : 7 = 10 = 99 : 9 - 1$. Марфа увидела число 66, а Никита — 99.

563. Ужалив, пчела умирает. Поэтому после конфликта осталось в живых $20 - (2 + x) - (3 + x)$ пчел. Из уравнения $15 - 2x = 3 + x$ находим $x = 4$. Васю укусили $3 + 4 = 7$ пчел.

566. *Первый способ.* Если $(x - y)xy = 45045$, где x и y — целые числа, то возможны четыре случая:

- оба числа x и y четны;
- x четно, а y нечетно;
- x и y нечетны;
- x нечетно, а y четно.

Во всех случаях произведение $(x - y)xy$ четно, что противоречит нечетности числа 45045.

Второй способ решения короче: если нечетное число 45045 разложено на целые множители $(x - y)$, x и y , то все эти множители нечетны, ибо нечетное число не может делиться на четное. Но если числа x и y нечетны, то их разность $(x - y)$ четна.

567. Если Николай — отец Петра, а у Петра есть сын, который тоже рыбачил, то, обозначив через x количество пойманных сыном Петра (т.е. внуком Николая) рыб, получим, что Петр и Николай поймали по $3x$ рыб, так что всего поймали $x + 3x + 3x = 7x$ рыб. Но 25 не делится на 7.

Если же Петр — отец Николая, сын которого тоже рыбачил, то они втроем поймали впятеро больше, чем младший из них. *Ответ:* Николай Петрович поймал 5 рыб.

568. Если 25 рублей разменяли на x рублевых, y трехрублевых и z пятирублевых купюр, то можно составить уравнение $x + 3y + 5z = 25$. Условие на количество купюр написать тоже легко: $x + y + z = 10$. Вычитая уравнения почленно, получим $2y + 4z = 15$, что невозможно: левая часть четна, а правая нечетна.

Для Знайки. Сумма двух нечетных чисел четна, сумма трех нечетных чисел нечетна, и вообще, сумма четного числа нечетных слагаемых четна, а сумма нечетного числа нечетных слагаемых нечетна.

570. Количество промежутков между точками на единицу меньше количества самих точек, поэтому, если в каждый промежуток поставить по точке, то получим количество точек, равное сумме двух последовательных чисел. Но в таком случае одно из них четно, а другое нечетно, следовательно, сумма всегда нечетна.

571. Число депутатов четно. Если «против» голосовало x депутатов, то «за» голосовало $x + 23$, и общее число $2x + 23$ оказывается нечетным.

576. Рядом с любым нечетным числом должно с одной стороны стоять четное, а с другой – нечетное число. Поэтому нечетные числа должны стоять парами. Среди первых 2001 натуральных чисел имеется 1001 нечетное число. А 1001 на 2 не делится.

578. Бобчинский.

584. Поскольку каждым ходом конь переходит с белого поля на черное или с черного на белое, после четного числа ходов он будет находиться на полях того же цвета, что и исходное, а после нечетного числа ходов – на полях другого цвета. Следовательно, 63-м ходом конь не может попасть на поле, цвет которого совпадает с цветом исходного поля.

585. При каждом ходе шашка с белой клетки попадает на черную, а с черной – на белую. Для того чтобы достичь некоторой клетки с выполнением указанного в задаче требования, фишка должна сделать 15 ходов. Число 15 – нечетное, и поэтому цвет клетки, на которую фишка попадет в конце пути, должен быть противоположен цвету той, с которой она стартовала.

На рисунке к условию задачи и на рисунке 79 показано, как фишка может достичь четырех белых клеток. Для нахождения путей на остальные белые клетки можно воспользоваться тем, что доска симметрична относительно диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним углом.

586. 8 вершин и 6 центров должны чередоваться.

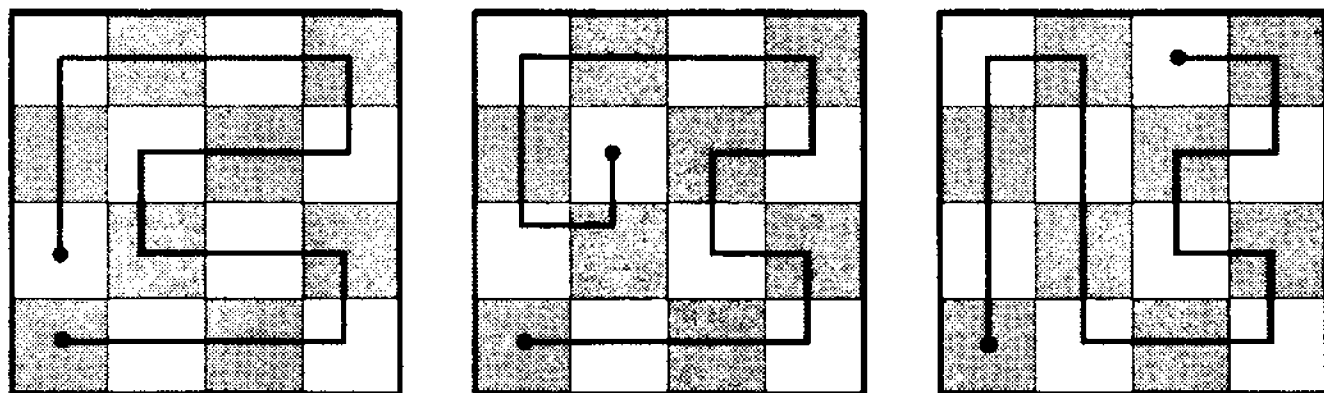


Рис. 79

588. б) Раскрасьте доску в шахматном порядке так, чтобы поле, отмеченное на рисунке 115 к условию, было черного цвета. Тогда черных полей на доске окажется на одно меньше, чем белых. Если начать обход с черного поля, то получим чередование ч–б–ч–б–... В такой цепочке черных полей не меньше, чем белых, поэтому обойти все черные поля таким образом нельзя.

589. Нет. *Указание.* Разбейте все 22 города на две группы из 10 и 12 городов так, чтобы при любом обходе города из разных групп чередовались между собой.

592. а) Если бы такое было возможно, то все звенья ломаной разбились бы на пары пересекающихся. Однако тогда число звеньев оказалось бы четным.

б) См. рис.80.

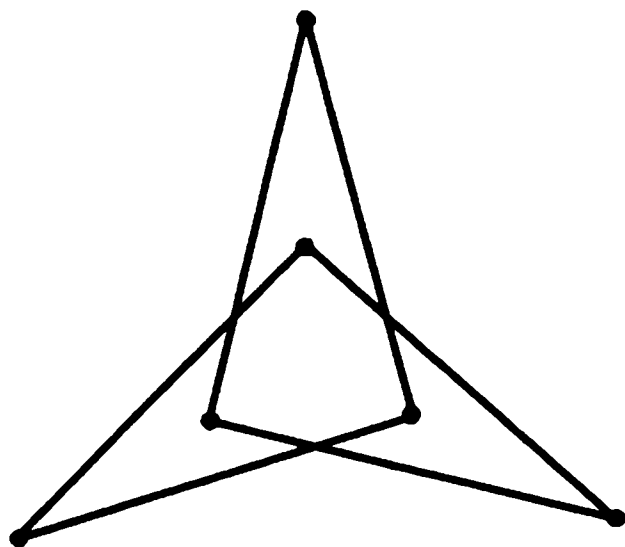


Рис. 80

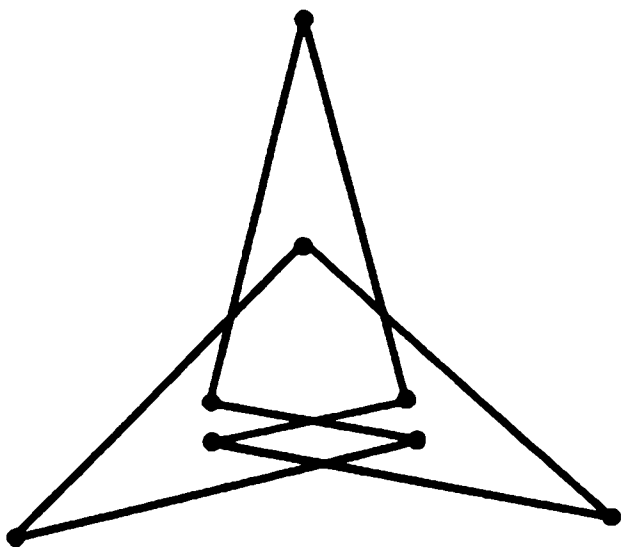


Рис. 81

в) Из любого четного числа, не меньшего 6 (рис.81).

594. а) См. рис.82; б) нельзя, ибо 9 ферзей нельзя разбить на пары.

595. Нельзя.

596. При четных n .

597. а) *Указание.* Если выпуклый многоугольник разрезан на параллелограммы, то каждой его стороне параллельна некоторая другая его сторона.

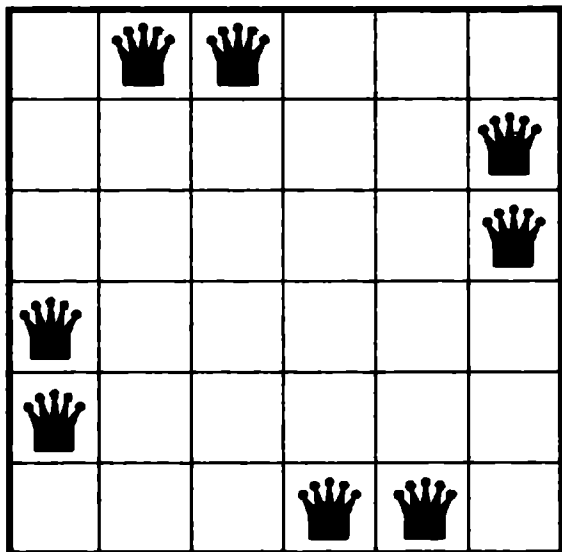


Рис. 82

б) Пример приведен на рисунке 83.

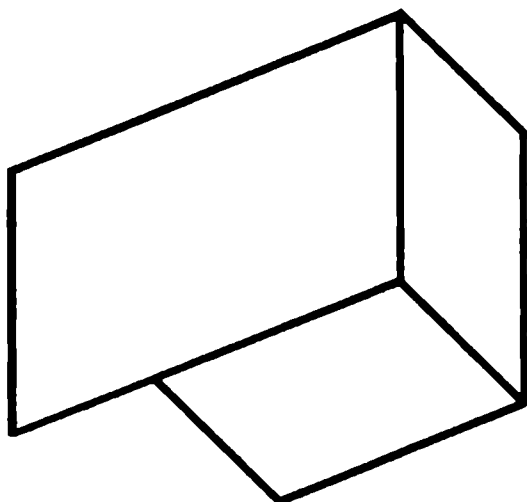


Рис. 83

598. Нет, не обязана. Пример – вершины правильного 11-угольника.

599. Нельзя! Каждая доминошка покрывает одну белую и одну черную клетки. Значит, среди покрытых доминошками клеток белых и черных должно быть одинаковое число. Но на шахматной доске 8×8 с вырезанными левой нижней и правой верхней угловыми клетками это не так: клеток одного цвета на две больше, чем другого.

600. Нельзя. Если прямоугольник раскрасить в шахматном порядке, то черных и белых клеток в нем будет поровну. А все фигурки, кроме одной, содержат равное количество черных и белых клеток!

601. Нельзя.

603. Раскрасим треугольники в два цвета в шахматном порядке. Тогда треугольников одного цвета будет 45, а другого – 55. Поскольку в цепочке цвета треугольников чередуются, то всего в ней не более $45 + 46 = 91$ треугольника.

Замечание. Точно так же можно доказать, что если треугольник был разбит на n^2 треугольничков прямыми, параллельными сторонам, то цепочка не может состоять более чем из $n^2 - n + 1$ треугольничков.

605. 15. *Указание.* Раскрасив клетки фигуры в шахматном порядке, заметьте, что в каждом из получающихся при разрезании прямоугольников разность количеств черных и белых клеток не превосходит 1.

606. Раскрасим доску в шахматном порядке, чтобы получилось 13 черных и 12 белых клеток. Поскольку соседние клетки разного цвета, то хотя бы одна черная клетка освободилась и хотя бы на одной белой оказались два (или более) жука.

607. Разрежем квадрат на блоки размером 2×2 . Любой блок либо весь одного цвета, либо две его клетки синие, а две – красные. Значит, в каждом блоке количество синих клеток четно. Следовательно, и во всем квадрате количество синих клеток четно.

608. Нельзя.

609. Воспользуйтесь тем, что шахматная доска симметрична относительно диагонали, и тем, что все недиагональные клетки, покрываемые восемью рассматриваемыми костями, одного и того же цвета.

610. а) Можно; б) нельзя.

620. Нельзя. *Указание.* Занумеруйте лампы, начиная с горящей, по кругу числами от 1 до 12 и убедитесь, что среди ламп с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 и 11 число горящих всегда будет нечетным.

621'. Занумеруем деревья по порядку числами от 1 до 44. Пусть в какой-то момент число чижей на первом дереве равно n_1 , число чижей на втором дереве равно n_2 , и так далее. Рассмотрим такую

сумму:

$$S = 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + \dots + 44 \cdot n_{44}.$$

Когда два чижа перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях, эта сумма либо вовсе не меняется, либо изменяется сразу на 44. Поэтому остаток от деления S на 44 не изменяется. Вначале

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 44 = \frac{44 \cdot 45}{2} = 990,$$

так что число S не делится на 44.

Если бы в некоторый момент все чижи собрались на одном дереве, то эта сумма стала бы делиться на 44 без остатка, что невозможно.

623. Нельзя. Сумма $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ нечетна. Каждая операция увеличивает сумму на 2. Поэтому сумма всегда будет нечетна и никогда не станет равна $6n$, где n — целое.

626. Если белых лоскутов x , то, поскольку каждый белый лоскут граничит с тремя черными, имеется $3x$ границ между белым и черным. Черных лоскутов $32 - x$. Поскольку каждый из них граничит с пятью белыми, можно еще раз посчитать границы между белым и черным и составить уравнение $5(32 - x) = 3x$, откуда $x = 20$.

628. а) Не может, ибо сумма девяти нечетных чисел не может быть равна 14. б) Может (рис.84).

633. Если квадрат разрезан на n прямоугольников, то сумма их углов равна $n \cdot 360^\circ$. Эта же сумма равна $4 \cdot 90^\circ + m \cdot 180^\circ$, где m —

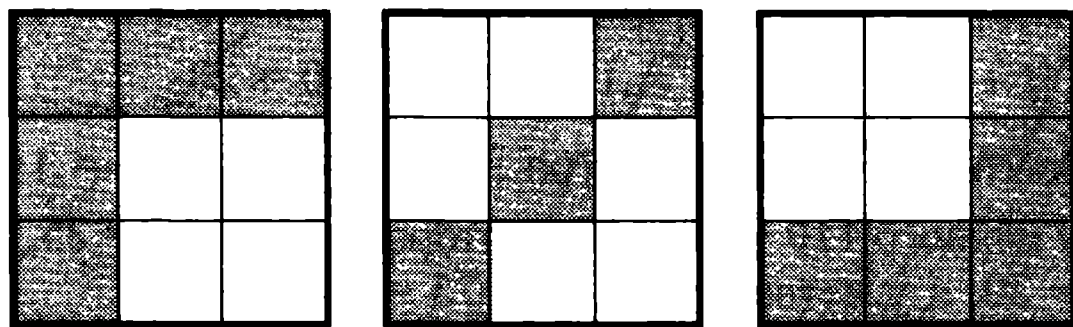


Рис. 84

количество точек, которые являются вершинами прямоугольников, но не являются вершинами квадрата. Значит,

$$n \cdot 360^\circ = 4 \cdot 90^\circ + m \cdot 180^\circ,$$

откуда $m = 2n - 2$, так что m — четное число.

637. Сумма координат ладей должна поменять четность.

⁴ Другими словами, S — сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи (как говорят математики, «с учетом кратности», т.е. номер k дерева, на котором находятся n_k чижей, входит в сумму n_k раз).

639. Вообразите, что продавец не ушел домой, а остался за своим прилавком. Пусть покупатели тратят по 2 рубля, покупая у каждого продавца на рубль. Тогда первые 10 покупателей купят 20 дорогих и 30 дешевых яблок, так что дешевые яблоки кончатся раньше, чем дорогие. Рубль исчез потому, что оставшиеся 10 дорогих яблок продали не по два яблока за рубль, а как смесь, по 5 яблок за 2 рубля.

Замечание. Поскольку более дорогое яблоко стоило $1/2$ рубля за штуку, а более дешевое — $1/3$ рубля, следовало продавать их по $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : 2 = \frac{5}{12}$ рубля. Эта цена на $\frac{5}{12} - \frac{2}{5} = \frac{1}{60}$ выше, чем установленная продавцами цена в $2/5$ рубля за штуку.

640. 2 рубля 40 копеек за килограмм.

645. 20 кг. *Первый способ.* Обозначим вес Ани буквой a . Тогда Таня весит $t = 40 - a$ кг, Маня — $m = 50 - (40 - a) = 10 + a$ кг, и т.д.

Второй способ. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} a + t = 40, \\ t + m = 50, \\ m + v = 90, \\ v + d = 100, \\ d + a = 60. \end{cases}$$

Сложив их и разделив на 2, получим $a + t + m + v + d = 170$, так что $a = 170 - (t + m) - (v + d) = 170 - 50 - 100 = 20$.

646. Всего денег у купцов $(90 + 85 + 80 + 75) : 3 = 110$ рублей. Поэтому у первого $110 - 90 = 20$, у второго $110 - 85 = 25$, у третьего $110 - 80 = 30$, а у четвертого $110 - 75 = 35$ рублей.

647. Занумеруем вершины по порядку. Очевидно, что суммы чисел в четных и нечетных вершинах совпадают (они равны сумме чисел на сторонах), откуда стертое число легко определяется.

Для Знайки. Сами числа на сторонах определить нельзя. Дело в том, что если на трех сторонах (взятых через одну) добавить одну и ту же величину, а на остальных трех сторонах эту величину вычесть, то числа в вершинах никак не изменятся.

650. Увеличим все числа в 100 раз. Если было разбиение на две группы с равными суммами, то и после увеличения в 100 раз оно тоже будет, но уже для целых чисел. Сумма полученных чисел $13 \cdot 110 + 15 \cdot 111$ нечетна. Значит, разбиение на две группы с равными суммами невозможно.

651. 3.

653. Нетрудно проверить общий факт, что прибавление к нескольким числам их среднего арифметического приводит к группе чисел с тем же самым средним арифметическим. Поэтому все стрелки, начиная с третьего, выбивали по 70 очков.

656'. Рассмотрите сумму всех чисел таблицы.

657. Всего существует 12 способов расстановки. Один из них показан на рисунке 85.

661. б) $(x; y; z) = (0; 0; 0), (6; 30; 20), (-6; -30; 20), (-6; 30; -20)$ или $(6; -30; -20)$; в) $(x; y; z) = (2; -1; 3)$.

664. При работе до встречи быстрый крот прокопает половину туннеля и еще некоторую часть. А если он остановится ровно на половине туннеля, то эту часть будет копать медленный крот, и его при этом придется кормить. Работа медленного крота обходится дороже, чем работа быстрого крота. Значит, работа «до встречи» обойдется дешевле.

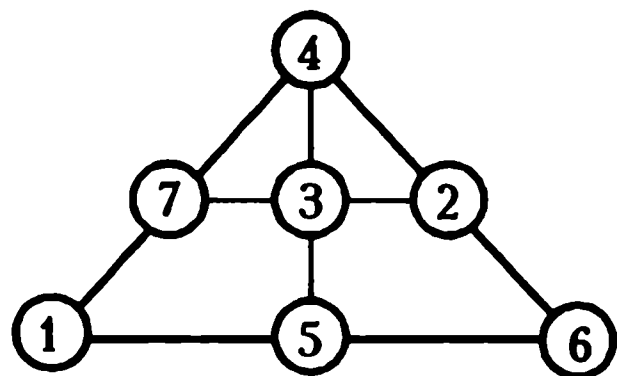


Рис. 85

665. 37,5 км/ч.

667. 2250 метров.

668. 5 часов 36 минут.

669. Приглядитесь к рисункам 86, а–в и поймете, что пешеход мог пройти от 15 до 20 км.

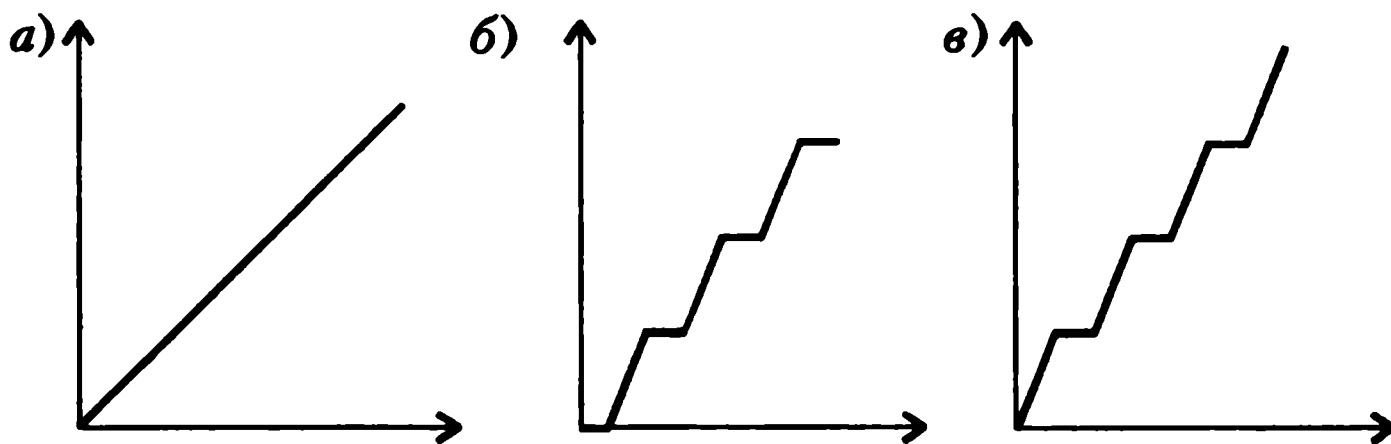


Рис. 86

671. а) $160/3$ км/ч; б) не зависит.

672. Указание. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

673. Шмель летал $300 : (30 + 30) = 5$ часов; пролетел $70 \cdot 5 = 350$ км.

674. Собака бегала $3 : (5 - 4) = 3$ часа, пробежала $3 \cdot 15 = 45$ км.

676. Произведение всех нечетных чисел от 1 до 51 оканчивается на 5, ибо нечетные числа при умножении на 5 в произведении дадут число с цифрой 5 на конце.

677. $5467 \cdot 898 = 4909366$.

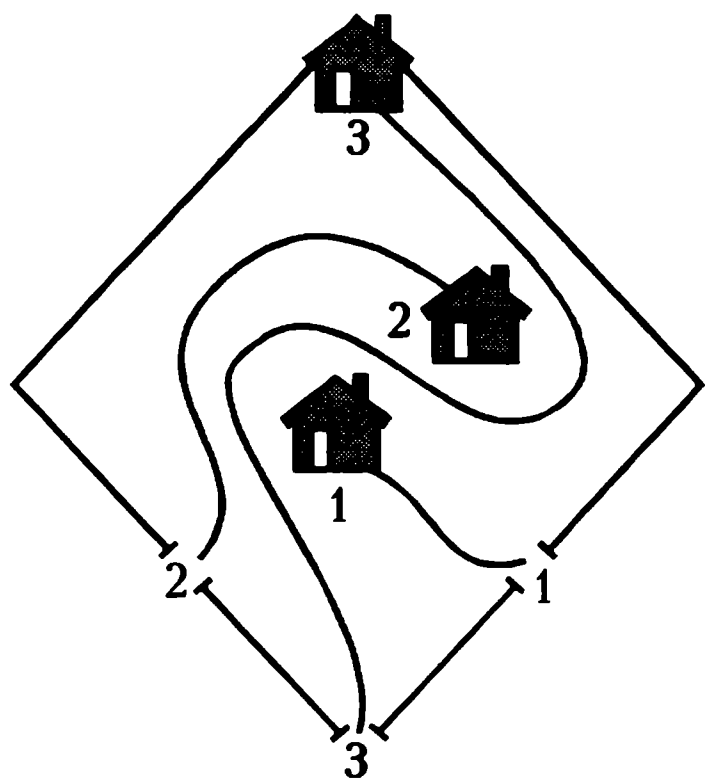


Рис. 87

в остатке – одно или ни одного. Всего получается 52 или 53 воскресенья. В 2000 году 53 воскресенья, а в 2001 году – 52 воскресенья.

681. См. рис.87.

682. Можно провести разрез по окружности с центром A (рис. 88,а), а можно вырезать прямоугольник, внутри которого точка A расположена симметрично центру O круга (рис.88,б). Есть и другие способы (рис.88,в, г).

684. а) $4n$; б) $4n + 1$; в) $4n + 2$.

685. а) 2 и 297; б) -9 и 7; в) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ и 1; д) 10010 и 1.

687. Поскольку $365 = 52 \cdot 7 + 1$, в любом году 52 недели и еще остаток – 1 или 2 дня⁵. В каждой неделе ровно одно воскресенье, а

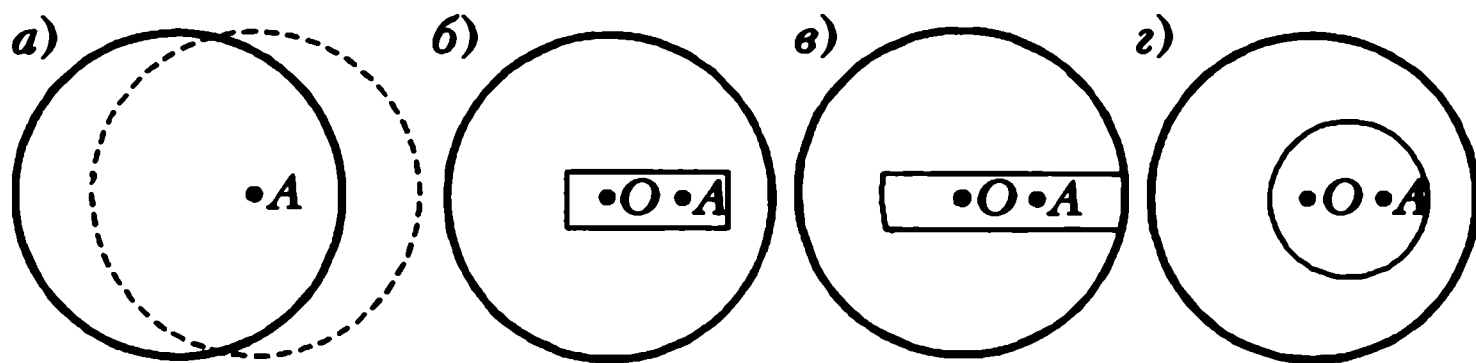


Рис. 88

690. Воскресенье.

691. а) Воскресенье. б) Год был високосный. 8 марта – среда.

692. Пальцы будут повторяться с периодом 8, поэтому достаточно рассмотреть остаток от деления 2000 на 8. Остаток равен нулю. Восьмым идет указательный палец.

696. а) Будем делить числа вида $11\dots 11$ на 7 «уголком». Числа 1, 11, 111, 1111, 11111 не разделятся нацело, а 111111 разделится. Отсюда ясно, что если в записи числа больше шести единиц, то после каждой шестой единицы очередной остаток будет равен нулю. Итак, число вида $11\dots 11$ делится на 7 тогда и только тогда, когда количество его цифр делится на 6.

б) *Указание.* Число $11\dots 11$ делится на 13 тогда и только тогда, когда количество его цифр делится на 6.

701. Да, существует.

707. Правильный ответ: $23 + 5(n - 1) = 5n + 18$. Дело в том, что

⁵ Если год високосный.

23 – первый, а не «нулевой» (т.е. «предшествующий первому») член прогрессии.

С аналогичным явлением мы сталкивались, когда писали формулу $3n - 1$ для чисел, дающих остаток 2 при делении на 3. Формула $3n + 2$ выглядит в этой ситуации более естественной, но требует подставлять $n = 0$ для того, чтобы получить значение $3n + 2 = 2$.

708. 23, 18, 13, 8 и 3.

714. 3, 7, 11, 15 и 19.

715. 15, 11, 7, 3, -1, -5, -9, -13, -17, ... $19 - 4n$.

716. 2 и 1.

717. На 16.

718. 120.

723. Единственный (с точностью до симметрии) способ показан на рисунке 89. Чтобы его найти, достаточно начать заполнение таблицы с угловой клетки.

725. Например, 15317. Если отбросить две последние цифры, то оставшиеся цифры в сумме дают 9, а число, из них составленное, делится на 17. Выпишем несколько кратных 17, пока не получим нужную сумму цифр: 17, 34, 51, 68, 85,

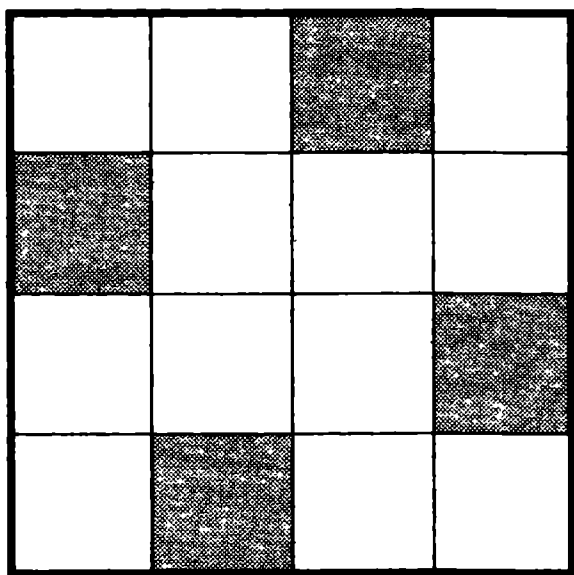


Рис. 89

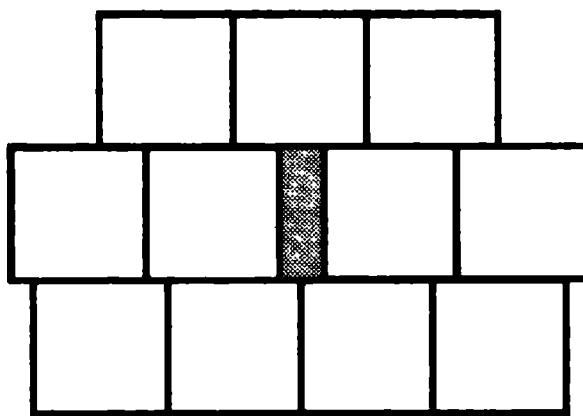


Рис. 90

102, 119, 136, 153. Впрочем, если бы мы вовремя вспомнили признак делимости на 9, то могли бы не проверять первые 8 вариантов, а начать сразу с произведения 17 на 9.

726. а) Например, 2899999 и 2900000.

727. Нет. Например, среди номеров от 000001 до 001000 (или от 998999 до 999998) нет счастливых.

733. Могло.

734. Каждая операция увеличивает на 1 центральное число. Ровно на 1 возрастает и сумма чисел угловых клеток. (Иными словами, стоящее в угловой клетке число показывает, сколько раз была произведена операция с соответствующим квадратом 2×2 .) Но $18 \neq 4 + 5 + 7 + 6$.

735. См. рис.90.

736. Не всегда. Закрашенные на рисунке 91 круги должны быть одного цвета, но два из них касаются.

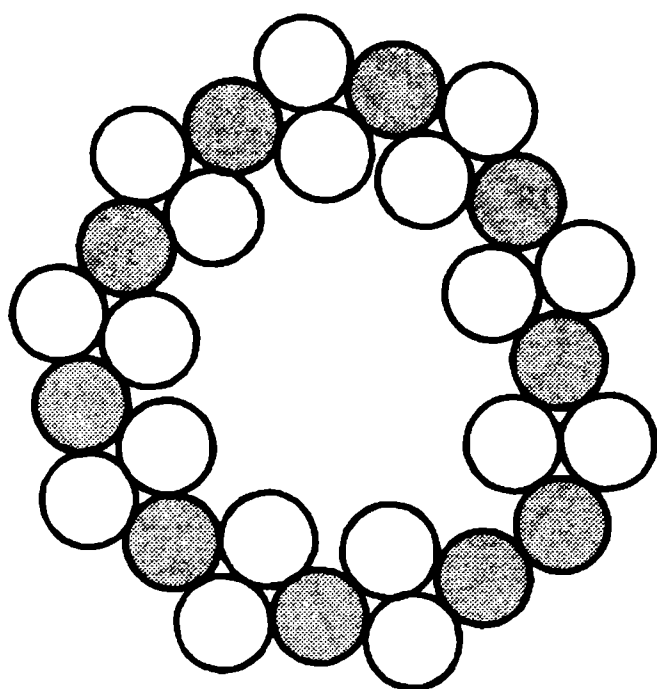


Рис. 91

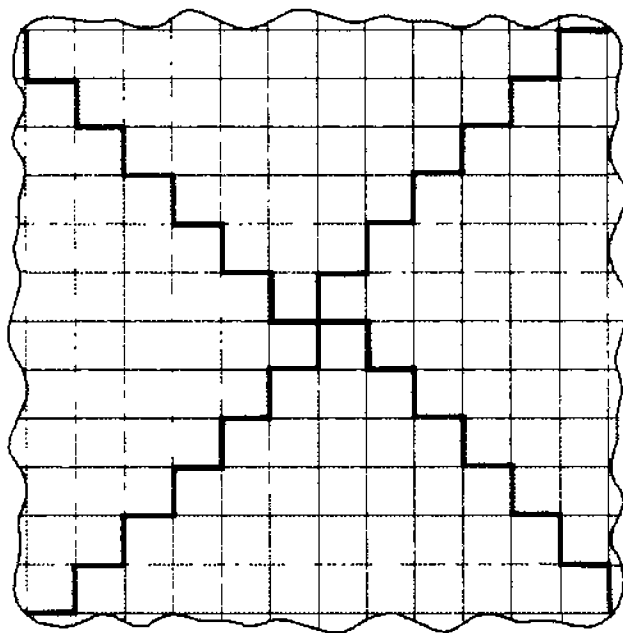


Рис. 92

737. Разбейте плоскость на четыре области, как показано на рисунке 92, и каждую из них разрежьте на доминошки.

738. Сначала сложите веревочку пополам (рис.93), вставив гвозди сверху и снизу. Получится что-то вроде седла со стременами.

Теперь можно вбить гвозди в стену – и задача решена (рис.94)!

740. Не всегда. Если выпилить

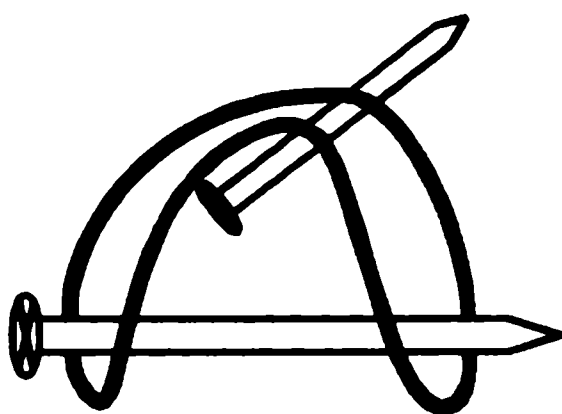


Рис. 93



Рис. 94

1-й, 5-й, 6-й и 8-й зубцы, то при любом повороте какие-нибудь две дырки совместятся.

741. Не всегда, ибо возможна ситуация, изображенная на рисунке 95. Княжествам соответствуют точки. Две точки соединены отрезком в том и только том случае, когда соответствующие княжества дружелюбны.

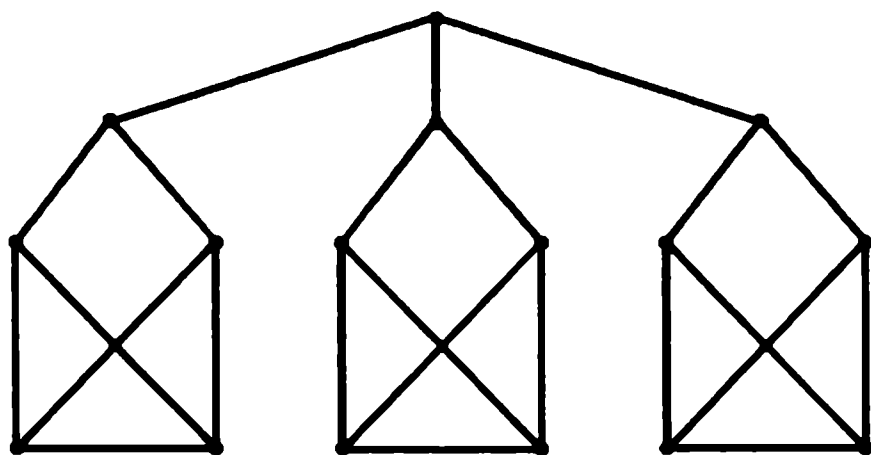


Рис. 95

743. а) $(1 + 19) + (3 + 17) + (5 + 15) + (7 + 13) + (9 + 11) = 20 \cdot 5 = 100$;
б) $9/23$; в) $101 \cdot 50 = 5050$;
г) $1994/2 = 997$.

748. $15 \cdot 25 = 375$.

749. $1 + 2 + 3 + \dots + 36 = 666$.

750. 10.

751. а) Разобьем гири на сто пар равной массы:

100 + 102, 99 + + 103, 98 + 104, ..., 1 + 201. Разложим пары гирь поровну на весы.

6) Составим две пары гирь равной массы: 198 + 200 и 197 + 201. Составим еще 98 пар гирь равной массы: 1 + 196, 2 + 195, 3 + + 194, ..., 98 + 99. Разложим гири на весы парами.

752. а) Расположим гири в порядке возрастания их массы и станем раскладывать их по одной в три кучки поочередно, то слева направо, то справа налево, т.е.

1-я кучка	2-я кучка	3-я кучка
1	2	3
6	5	4
7	8	9
...

После любого четного числа таких операций (в частности, после $552 : 3 = 184$ операций) массы кучек будут равны.

б) Первые 9 гирь разложите, например, так: 1 + 9 + 5, 6 + 7 + + 2, 3 + 4 + 8, а оставшиеся 546 гирь – так же, как в предыдущей задаче.

в) Суммарная масса всех n гирь равна $1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2$. Для того чтобы можно было разложить гири на 3 кучи одинаковой массы, очевидно, необходимо, чтобы или n , или $n + 1$ делилось на 3. Покажите, что при $n > 3$ это и достаточно. Рассуждать можно, например, по такому плану. Значения $n = 5, 8, 9$ и 12 исследуются непосредственно. Общий случай сводится к этим частным, если учесть, что 6 последовательных натуральных чисел можно разбить на 3 пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковы.

753. 3 щелчка. Год был високосный.

755. Искомое число пассажиров делится на 2 и, кроме того, $\frac{2}{25}$ (=8%) от этого числа есть число целое. Следовательно, искомое число делится на 2 и на 25, т.е. на 50, а так как оно не превосходит 70, то *ответ*: 50.

756. Пусть в короля попало x тухлых яиц и y кочанов гнилой капусты. Тогда $64 + x + y = 4x + 6y$, откуда $3x + 5y = 64$.

Это уравнение легко решить в целых неотрицательных числах: $(x; y) = (3; 11), (8; 8), (13; 5)$ или $(18; 2)$. Поскольку количество яиц кратно 3, а количество кочанов капусты четно, из четырех вариантов остается последний: $x = 18, y = 2$. В этом случае 64 зрителя метали в Дэвида Гаррика младшего и Эдмунда Кина старшего (см. Марк Твен, «Приключения Гекльберри Финна») дохлых кошек, $18 \cdot 5/3 = 30$ – тухлые яйца, а $2 \cdot 7/2 = 7$ – гнилую капусту. Итого: $64 + 30 + 7 = 101$.

757. 24.

758. 814, 1026, 150.

760. а) $185 = 8 \cdot 21 + 17 = 5 \cdot 21 + 5 \cdot 16 = 4 \cdot 21 + 5 \cdot 17 + 16 = 21 +$
 $+ 4 \cdot 17 + 6 \cdot 16 = 9 \cdot 17 + 2 \cdot 16$.

760'. б) $(x; y; z) = (0; 25; 75), (4; 18; 78), (8; 11; 81)$ или $(12; 4; 84)$.

761. 1 бык, 9 коров и 90 телят.

762. 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.

762'. $(x; y; z) = (8; 4; 0)$ или $(5; 1; 6)$.

763. Например, если один динар – это 60 топаров и есть монеты достоинством 1, 2, 3, 4, 5, 15, 30 топаров, то каждой такой монетой можно набрать динар и семь этих монет в сумме дают один динар. Иначе говоря,

$$\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \frac{3}{60} + \frac{4}{60} + \frac{5}{60} + \frac{15}{60} + \frac{30}{60} = 1.$$

764. Одна пара очевидна ($x = y = 2$), а вторая – $x = 2^5 = 32$, $y = 2^4 = 16$ или $x = 20000$, $y = 2000$.

Вообще, из уравнения следует, что число y четно. Положив $y = 2m$, получим $2x^3 = 16m^4$, откуда видно, что x четно, $x = 2n$, и уравнение преобразуется к виду $n^3 = m^4$. Но если число одновременно является и третьей, и четвертой степенью, то оно есть двенадцатая степень k^{12} , т.е. $n = k^4$, $m = k^3$, что позволяет указать все решения нашего уравнения: $(x; y) = (2k^4; 2k^3)$.

766. Самый мудрый из мудрецов через некоторое время может догадаться с помощью следующего рассуждения: «Допустим, на мне белый колпак. Тогда каждый из двух, исключая меня, видит перед собой один белый и один черный колпак. В этом случае, предположив, что на нем также белый колпак, один из них легко догадается, что на нем не может быть белого колпака, поскольку в этом случае третий видел бы перед собой два белых колпака и мгновенно понял бы, что на нем черный колпак. А это означает, что на мне также черный колпак».

Впрочем, как-то раз одного человека приговорили к смертной казни. В приговоре было сказано, что казнь должна состояться не позднее, чем через 7 дней, начиная со следующего, но приговоренный накануне казни не должен знать о том, что завтра будет казнь. Услышав это, осужденный обрадовался, поскольку решил, что условия приговора невыполнимы. В самом деле, если отсчет времени начинается с понедельника, то в субботу ему об этом заведомо будет известно. Но поскольку казнь не может произойти в воскресенье, то она не может произойти и в субботу, ибо в этом случае об этом стало бы известно в пятницу. Продолжая цепочку рассуждений, заключенный пришел к выводу, что казнь вообще невозможна,

и спокойно лег спать. На следующий день его казнили! При этом, как видите, все условия были соблюдены.

767. Нет, при $n = 41$ число $n^2 + n + 41$ делится на 41. Составное оно и при $n = 40$, ибо $40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41(40 + 1) = 41^2$.

Замечание. Можно проверить, что при всех натуральных n от 1 до 39 число $n^2 + n + 41$ простое. Этот знаменитый пример принадлежит Леонарду Эйлеру.

768. $8 = 3 + 5$; $9 = 3 + 3 + 3$; $10 = 5 + 5$. Любое большее число получается добавлением троек.

772. Ответ для n домов: можно построить $2n - 1$ заборов. В самом деле, если дом один, то можно построить только один забор, что соответствует формуле $2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Дальше применим индукцию. Если для 1, 2, ..., $n - 1$ домов формула уже проверена, то рассмотрим n домов, вокруг которых построено максимально возможное количество заборов. Какой-то один забор огораживает все дома. Если этот внешний забор снести, то самыми внешними станут некоторые два забора. Внутри одного из них будет некоторое число k домов, а внутри другого – остальные $n - k$ домов. Поскольку $k < n$, вокруг k домов может быть построено, самое большее, $2k - 1$ заборов. Аналогично, вокруг остальных $n - k$ домов может быть построено, самое большее, $2(n - k) - 1$ заборов.

Значит, всего заборов не более

$$(2k - 1) + (2(n - k) - 1) + 1 = 2n - 1.$$

775. Обозначим через $f(n)$ наибольшее число частей, на которые n прямых могут разбить плоскость. Порисовав, можно заполнить таблицу

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	2	4	7	11	16	22	29	37

и обнаружить закономерность $f(n + 1) = f(n) + n$. Вам осталось доказать эту закономерность и вывести из нее явную формулу

$$f(n) = \frac{n(n + 1)}{2} + 1.$$

776. Маршрут легко придумать, взглянув на рисунок 96.

777. а), б), в), г) См. рис.97. д) Поля верхней и нижней горизонталей будем называть крайними, а поля средних горизонталей – средними.

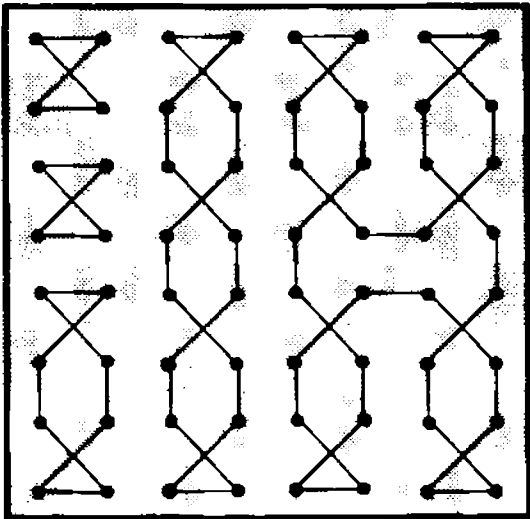


Рис. 96

а)

20	9	16	3	12
15	2	11	6	17
10	19	8	13	4
1	14	5	18	7

б)

24	11	16	3	20	7
17	2	19	6	13	4
10	23	12	15	8	21
1	18	9	22	5	14

в)

28	5	22	7	18	13	16
23	2	25	12	15	10	19
4	27	6	21	8	17	14
1	24	3	26	11	20	9

г)

$H-6$	$K+2$	$H-2$	K	Доска размером $4 \times n$
$H-3$	$K+5$	$H-5$		
$K+3$	$H-1$	$K+1$		
$K+6$	$H-4$	$K+4$	H	

Рис. 97

Поскольку с крайних полей можно идти только на средние, а крайних клеток столько же, сколько средних, в маршруте крайние поля должны располагаться строго через одно. (Если бы где-нибудь встретились подряд две средние клетки, то в качестве «компенсации» должны были бы найтись и две крайние, идущие подряд.)

Но в этом случае все они были бы одного цвета, а это противоречит устройству шахматной доски.

778. а) Рассмотрите каемку шириной в 2 клетки, идущую по краю доски. Придумайте замкнутый путь коня, который проходит по одному разу через каждое поле этой каемки. Разбейте всю доску на такие полосы. Путь начните с центральной клетки. б) См. рис.98. в) Разбейте доску на четыре доски размером 5×5 (рис.99). Обойдите сначала одну из них, затем вторую, третью и четвертую.

779. См. рис.100.

780. После каждого распила число бревен увеличивается ровно на 1. Было $72 - 52 = 20$ бревен.

7	12	17	22	5
18	23	6	13	16
11	8	15	4	21
24	19	2	9	14
1	10	25	20	3

Рис. 98

		100			
		76	1	25	
	75	51	26		
		50			

Рис. 99

Рис. 100

A complex black and white line drawing of a square maze. The maze is composed of thick black lines forming a grid of paths and dead ends. It features a central square area with internal walls, and multiple paths leading to the edges of the square. The design is symmetrical and intricate, typical of a logic puzzle or a challenge for spatial reasoning.

Рис. 102

Для Придиры. Чтобы доказать, что деревьев без листьев не бывает, рассмотрим граф, в котором из каждой вершины исходит не менее 2 ребер. Из его вершины A_1 пройдем по ребру в A_2 . Из A_2 выходит более одного ребра, поэтому можно пройти в вершину $A_3 \neq A_1$, из нее — в A_4, \dots . Поскольку число вершин графа конечно, рано или поздно образуется цикл.

789. Если 7 щук насытятся (съев каждая по 3 голодные щуки), то останутся еще 2 голодные, которые смогут насытиться (съев каждая по 3 щуки, которые только что насытились). Таким образом, $7 + 2 = 9$ щук могут насытиться.

Если же предположить, что насытились 10 щук, то всего ока-

⁶ Лист – это вершина, из которой исходит единственное ребро.

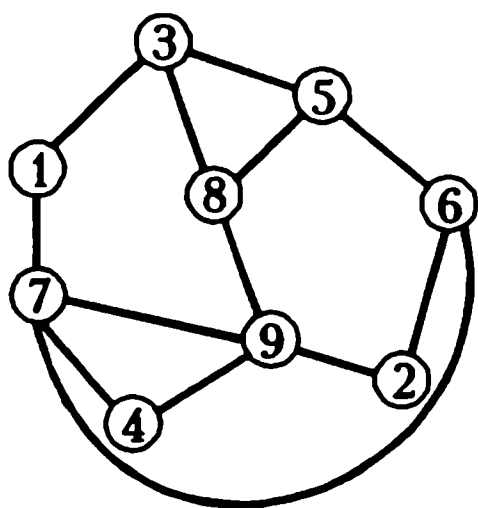


Рис. 103

жется съедено не менее 30 щук, что невозможно.

792. Нарисуем 9 кружков и расставим в них цифры от 1 до 9. Соединим линией всякие два кружка, цифры в которых могут стоять рядом. Полученный граф перерисуем, по возможности «распутав» его (рис. 103). Теперь вопрос можно сформулировать так: *можно ли, идя только по линиям, обойти все кружки этой фигуры по одному разу и вернуться на прежнее место?*

Ответ очевиден: можно, причем по существу единственным образом.

Для Придиры. 4 связано только с 7 и 9. Аналогично, соседи 2 – цифры 6 и 9. Значит, 2 и 4 – соседи 9, а 7 и 8 – заведомо не соседи 9. Поэтому связи 9 с 7 и 8 можно зачеркнуть. Аналогично, 1 имеет соседями 3 и 7. Значит, соседи 7 – цифры 1 и 4, а связь 7 с 6 можно зачеркнуть. Теперь 8 связано только с 3 и 5, так что связь между 3 и 5 можно зачеркнуть. Оставшиеся линии дают единственное (с точностью до направления обхода) решение.

794. Составим таблицу, строки которой – «Гена», «Дима», «Володя», «Алик» и «Боря», а столбцы – «Ляпкин-Тяпкин», «Хлестаков», «Осип», «Земляника» и «Городничий»:

	Ляпкин-Тяпкин	Хлестаков	Осип	Земляника	Городничий
Гена	+	+			
Дима	+		+		
Володя				+	+
Алик		+			+
Боря		+			+

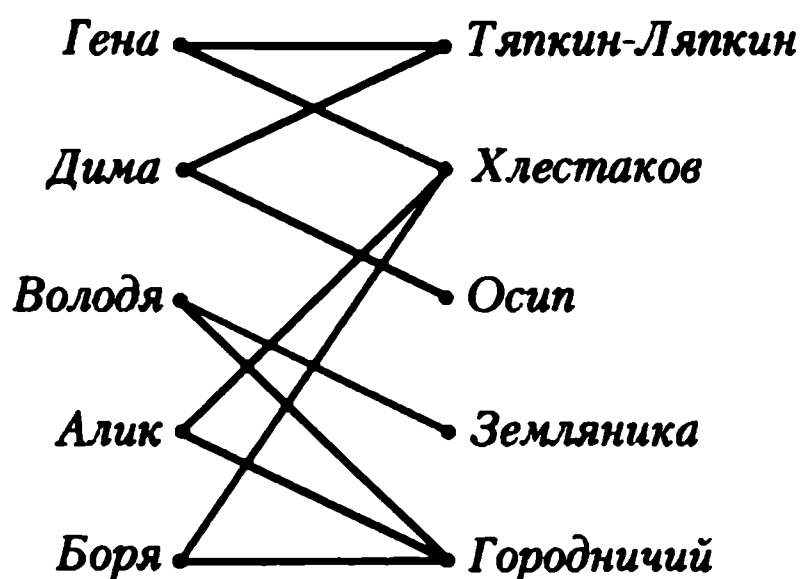


Рис. 104

По таблице легко найти способ распределить роли без обид: Осип – Дима, Ляпкин-Тяпкин – Гена, Земляника – Володя, а Городничий и Хлестаков – это Алик и Боря. Если посмотреть на граф (рис. 104), то покажется, что задача совсем простая. Тем не менее, если не догадаться наглядно изобразить условие задачи, то в нем можно запутаться.

797. Из условия задачи вытекает, что

$$T > И > P > A > K > B > O > П > C > H.$$

Букв здесь десять. Различных цифр тоже десять. Поэтому $T = 9$, $И = 8$, $P = 7$, $A = 6$, $K = 5$, $B = 4$, $O = 3$, $П = 2$, $C = 1$, $H = 0$.

801. 6. Разобьем числа от 1 до 10 на три цепочки 1–2–4–8, 3–6, 5–10 и два отдельных числа – 7 и 9. Нельзя брать соседние числа в цепочке. Значит, из первой цепочки можно взять не более 2 чисел, а из любой другой цепочки – не более чем по одному числу.

802. На 2 команды. Пусть каждые два толстяка, один из которых вдвое тяжелее другого, возьмутся за руки. Получатся цепочки. Раскрасим каждую цепочку попеременно в два цвета, а потом сформируем две «одноцветные» команды. Толстяки одного цвета не брались за руки, поэтому никакие два из них не будут отличаться по весу в два раза.

802'. В одну часть мы можем отправить числа, в разложение которых на простые множители множитель 2 входит в нечетной степени, а в другую – остальные числа.

805. Все числа от 50 до 99. Соединим те из чисел от 1 до 99, которые дают в сумме 99 или 100. Получится цепочка

$$99-1-98-2-97-3-\dots-51-49-50.$$

Очевидно, единственный способ выбрать 50 чисел, не соседствующих в цепочке друг с другом – взять числа 99, 98, 97, ..., 51, 50.

809. С помощью умножения «столбиком» нетрудно убедиться, что данное число является квадратом числа 101010101010101.

$$\begin{aligned} \mathbf{812.} \quad \text{Число} \quad & 19 \cdot \underbrace{63\dots 32}_{n \text{ раз}} = 20 \cdot \underbrace{63\dots 32}_{n \text{ раз}} - \underbrace{63\dots 32}_{n \text{ раз}} = \underbrace{126\dots 640}_{n \text{ раз}} - \\ & - \underbrace{63\dots 32}_{n \text{ раз}} = 120 \underbrace{3\dots 3}_{n-1 \text{ раз}} 08 \end{aligned}$$

делится на 19 при любом натуральном n .

Впрочем, можно было применить алгоритм деления «уголком».

813. Как бы они ни играли, на доске в конце концов окажется 8 ладей. Выиграет второй.

Для Премудрой Совы. После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно ставить ладьи, уменьшается на 1. Поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный ход будет сделан вторым игроком.

816. а) Второй копирует цифры первого. Получается число $aabbcc$, которое делится на 11.

б) Выигрывает второй, добиваясь ситуации $a(a-1)bbcc$. Какую бы цифру ни поставил вместо звездочки первый, на 11 число делиться не будет.

819. Второй игрок выигрывает, называя числа, делящиеся на 10.

822. Если король находится на поле $a1$, то начинающий проигрывает. Поставим на это поле букву П. Отметим буквами В поля, с

которых можно попасть за один ход на поле $a1$. Ясно, что они выигрышные (для начинающего).

Если все ходы с некоторого поля A ведут на выигрышные поля, то после любого хода начинающего его противник окажется в выигрышном положении. Поэтому мы отмечаем буквами Π поля $a3$ и $c1$ — они проигрышные для начинающего.

Далее, пишем B на все поля, с которых можно попасть за один ход на поля, отмеченные Π . Продолжая, расставим буквы на все поля доски.

Для выигрыша достаточно каждый раз передвигать фигуру на Π (ставя тем самым противника в проигрышное положение). Начинаящий может это делать, если игра начинается с поля B .

822'. Каждому ходу в игре с камнями можно соотнести ход на шахматной доске по следующему правилу: если берется камень из первой кучи, то фигура передвигается на одно поле влево, а если из второй кучи, то на одно поле вниз. Естественно при этом передвигать фигуру по диагонали влево-вниз, если берется по одному камню из обеих куч.

Заметим, что в результате получилась игра на шахматной доске, рассмотренная в задаче 822. Положение, при котором в обеих кучках не останется камней, надо соотнести левому нижнему угловому полю. Вообще, положению «в первой кучке m камней, а во второй n » соответствует пересечение $(m + 1)$ -й вертикали и $(n + 1)$ -й горизонтали. Расставляя B и Π как в предыдущем пункте, приходим к следующему выводу. Начинаящий имеет выигрышную стратегию, если хотя бы одно из чисел m , n нечетно. Играть надо, оставляя партнеру каждый раз четное число камней в каждой куче.

823. В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу. Проигрышными позициями являются нечетные числа. Побеждает первый.

824. В первой сотне есть лишь одна тройка последовательных нечетных составных чисел: 91,⁷ 93 и 95. Поэтому единственный шанс остановить игру в пределах первой сотни — получить число 88. Начинаящий может это сделать, называя (независимо от ходов второго игрока!) числа 8, 18, 28, ..., 88. (В самом деле, если второй прибавит 3, то начинающий прибавит 7; если 5, то 5; если 7, то 3.)

829. Используем не центральную, а осевую симметрию шахматной доски. За ось симметрии возьмем прямую, разделяющую четвертую и пятую горизонтали. Симметричные относительно нее поля имеют разный цвет, и, тем самым, слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое. В игре выигрывает второй игрок.

830. Начинаящий выиграет, разбив первым ходом минусы на

⁷ Число 91 делится на 7. Вообще, решая эту задачу, полезно понимать, что если число меньше 100, то для проверки его простоты достаточно проверить, делится ли оно на 2, 3, 5 и 7.

два «куска» равной длины и переправляя затем каждым следующим ходом минусы, симметричные тем, которые перед этим переправил второй игрок. Например, вот какие позиции появятся после первого хода для семи и восьми минусов:

— — — + — — —

— — — + + — — —

831. Второй может разбить ромашку на две одинаковые части и поддерживать это состояние.

833. а) Игра продлится 39 ходов. б) Первый игрок может соединить первую точку с одиннадцатой, а затем на каждый ход второго игрока отвечать симметричным ходом.

834. а) Второй игрок выиграет, поддерживая равенство куч. б) Начинаящий забирает одним ходом все камни одной кучи, а затем каждым ходом уравнивает количества камней двух оставшихся куч.

836. Стороны нечетногоугольника нельзя раскрасить в два цвета, соблюдая правила игры. Трех красок, как легко понять, хватит в любом случае. Теперь можно предложить выигрышную стратегию для второго игрока: в ответ на первый ход *AB* первого игрока он красит второй краской сторону *CD*, расположенную через одну от стороны *AB* (рис.105). Если после этого первый игрок закрасит сторону *BC*, то он будет вынужден применить третью краску и утратит шансы на победу – не будет же второй игрок применять четвертую краску, если можно ограничиться тремя! На любой ход первого игрока второй может отвечать симметричным образом (точнее говоря, второй игрок будет закрашивать другой краской сторону, симметричную только что закрашенной первым игроком стороне относительно прямой *l* – серединного перпендикуляра к *BC*).

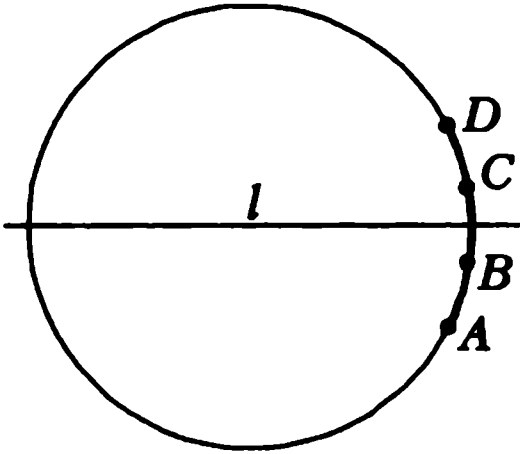


Рис. 105

837. 4.
840. Рисунок 106 показывает три разных способа ранить любой корабль, выстрелив 12 раз.

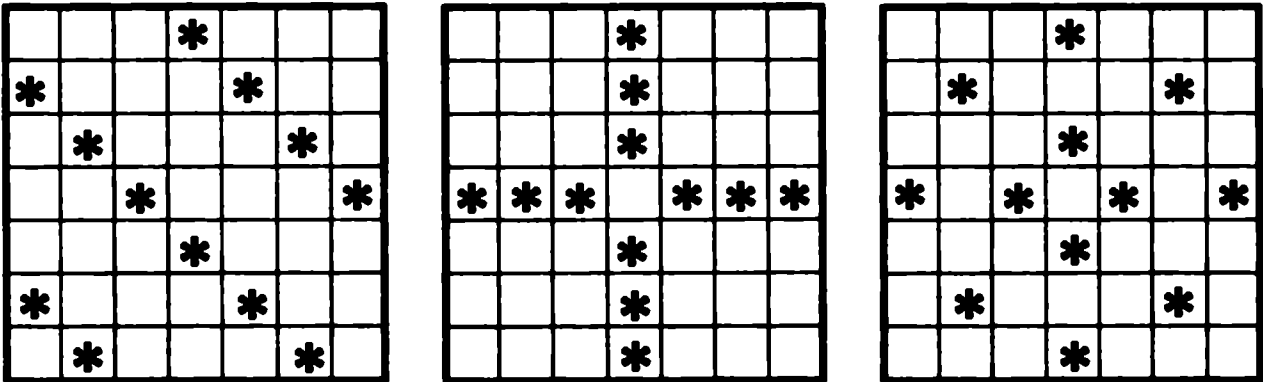


Рис. 106

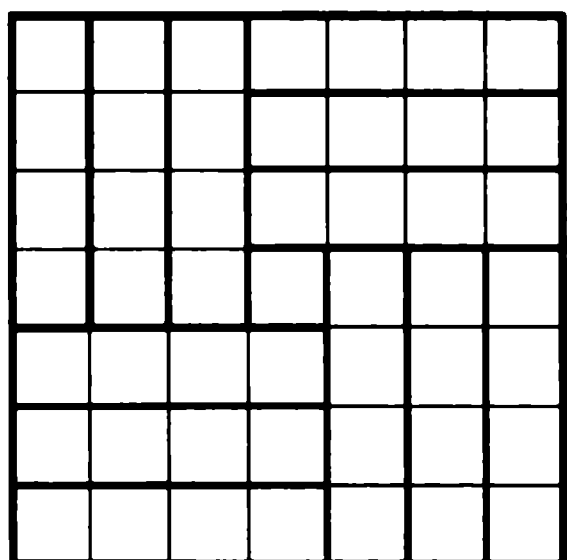


Рис. 107

А для доказательства необходимости 12 выстрелов мы разместим на доске 12 кораблей размером 4×1 (рис.107).

841. Можно. Подожжем один из шнуров с обоих концов и одновременно второй – с одного конца. Первый шнур сгорит через 30 секунд; в этот момент подожжем второй шнур со второго конца.

844. Обозначим через x количество учеников, участвовавших ровно в одной олимпиаде. Тогда ровно в двух олимпиадах участвовали $x/2$ школьников, а в трех – $x/3$. Составим уравнение

$$100 + 50 + 48 = x + 2 \cdot \frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{x}{3}$$

и решим его: $x = 198/3 = 66$. Значит, всего в олимпиадах участво-

вали $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 66 + 33 + 22 = 121$ школьник.

845. Две партии.

846. а) $10 \cdot 9/2 = 45$; б) $n(n-1)/2$.

847. Если x шахматистов сыграли друг с другом по y партий, то всего было сыграно $\frac{x(x-1)}{2} \cdot y$ партий. Приравнивая это число к 224, получаем уравнение $x(x-1) \cdot y = 448$. Среди делителей числа $448 = 7 \cdot 64$ только два (7 и 8) отличаются ровно на единицу. Поэтому 8 шахматистов сыграли друг с другом по 8 партий. Есть еще один, тривиальный вариант: два игрока сыграли друг с другом 224 партии.

848. Не играли. Если выбывшие не играли между собой, то с их участием состоялось 10 партий, а если играли, то 9. Но круговой турнир не может состоять из $38 - 9 = 29$ партий.

850. От 4 до 12.

851. Количество точек пересечения отрезков было бы равно $(7 \cdot 3):2$.

852. а) Нарисуем 4 отрезка, каждые два из которых пересекаются.

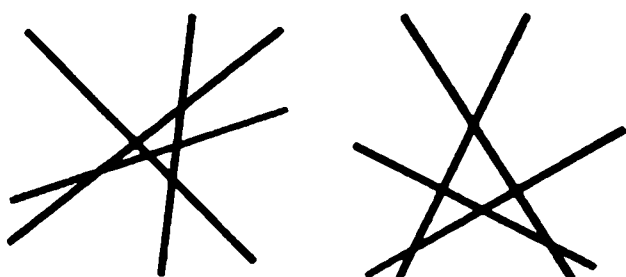


Рис. 108

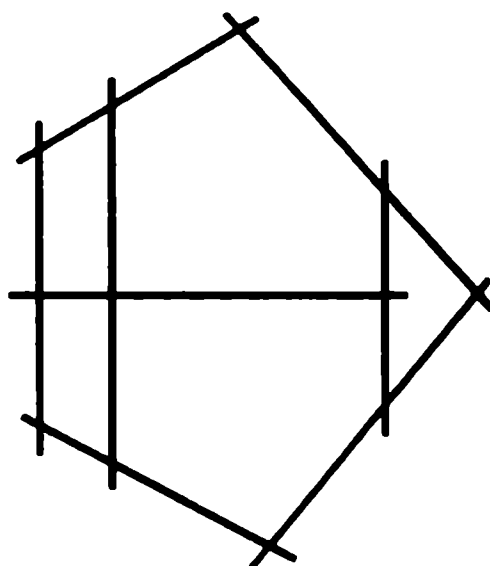


Рис. 109

Отдельно от них нарисуем еще 4 таких отрезка (рис. 108). Есть и другие способы (рис. 109).

6) См. рис. 110.

853. Если n шаров так расположены, то удвоенное число точек касания равно $3n$. Поэтому n должно быть четно.

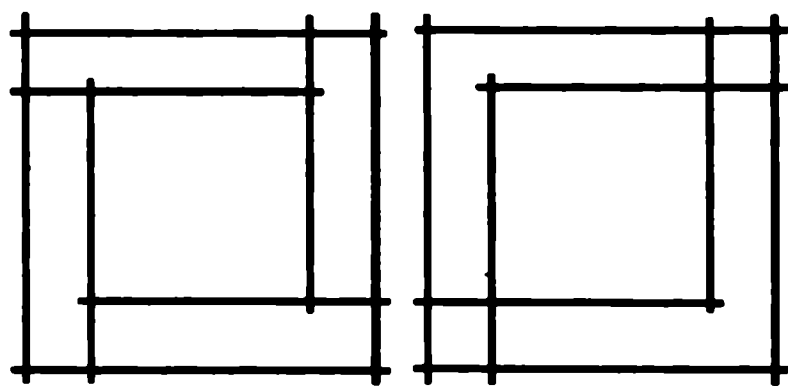


Рис. 110

При $n = 4$ центры шаров – вершины правильного тетраэдра. При $n = 2k$, где $k \geq 3$, расположим центры k шаров в вершинах правильного k -угольника, а затем приложим сверху точно такую же цепочку шаров, чтобы каждый шар одной цепочки касался одного шара другой цепочки.

856. 1 очко. Первые трое сыграли с остальными $3 \cdot 5 = 15$ партий, а между собой 3 партии, и потому могли набрать $15 + 3 = 18$ очков. В действительности они набрали $7 + 6 + 4 = 17$ очков.

858. Шахматисты, занявшие последние четыре места, сыграли между собой 6 партий и поэтому набрали все вместе не меньше 6 очков уже в этих партиях. Следовательно, занявший второе место набрал не меньше 6 очков.

С другой стороны, он не мог набрать больше 6 очков: если победитель турнира набрал 7 очков, то второй ему проиграл и, значит, набрал не больше 6 очков; если же у первого 6,5 очков, то у второго также не больше 6 очков.

Отсюда следует, что второй набрал ровно 6 очков, а занявшие последние четыре места проиграли все партии игрокам, занявшим первые три места.

859. Нетрудно понять, что каждый сыграл по 4 партии, а всего было сыграно 10 партий. Щукин набрал не более 3 очков, поскольку, по словам Окунева, хотя бы одну партию Щукин проиграл.

Но Щукин не мог набрать меньше 3 очков, поскольку в противном случае общее число очков не превосходило бы числа $2,5 + 2 + 1,5 + 1 + 0,5 = 7,5$, что меньше 10. Значит, Щукин одну партию проиграл, а остальные выиграл. Вспоминая, что Окунев никому не проиграл, заключаем: Щукин проиграл Окуневу, а у всех остальных выиграл.

Теперь заметим, что $3 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1 = 10$, поэтому Окунев набрал 2,5 очка, Ершов – 2, Карасев – 1,5, а Пескарев – 1 очко. Поскольку Окунев, не проиграв ни одной партии, набрал в играх с Ершовым, Карасевым и Пескаревым 1,5 очка, все эти три партии были ничейными.

Если бы Ершов с Карасевым сыграли вничью, то ничья была бы и между Карасевым и Пескаревым, что противоречит утверждению Пескарева о том, что все другие одержали хотя бы по одной победе.

Значит, Ершов выиграл у Карасева, а Карасев – у Пескарева, так что партия Ершова и Пескарева закончилась вничью:

	Щукин	Окунев	Ершов	Карасев	Пескарев	Сумма
Щукин	–	0	1	1	1	3
Окунев	1	–	1/2	1/2	1/2	2,5
Ершов	0	1/2	–	1	1/2	2
Карасев	0	1/2	0	–	1	1,5
Пескарев	0	1/2	1/2	0	–	1

860. а) Вничью должна закончиться ровно треть игр. Но число $17 \cdot 16 : 2$ не кратно 3.

б) Могло. Расположите команды по кругу. Пусть каждая выигрывает у пяти команд, следующих за ней по часовой стрелке, сделает ничьи со следующими пятью и проиграет следующим пяти командам.

в) Могло.

861. 9. Поскольку каждая игра увеличивает сумму очков противников на 1, общая сумма очков всех участников равна числу сыгранных партий. По условию, каждый шахматист половину своих очков набрал от трех последних, значит, от остальных он набрал тоже половину. Вообще, в любом круговом турнире число партий, сыгранных k участниками между собой, равно $k(k - 1) / 2$. Действительно, каждый из k участников должен сыграть с каждым из $(k - 1)$ остальных, и при этом в произведении $k(k - 1)$ каждая партия учитывается дважды.

Три игрока, занявшие последние места, сыграли между собой 3 партии, которые дали им 3 очка – половину от всего количества очков, набранных ими в турнире; следовательно, всего у них 6 очков. Лучшие x игроков в играх между собой набрали $x(x - 1) / 2$ очков, что по условию составляет половину набранных ими очков. Таким образом,

$$x(x - 1) + 6 = \frac{(x + 3)(x + 2)}{2},$$

т.е. $x^2 - 7x - 6 = 0$, откуда, вследствие разложения $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$, получаем $x = 1$ или 6.

Ответ $x = 1$ не удовлетворяет условиям задачи: лучший шахматист мог бы набирать очки лишь от трех остальных – худших, а это по условию должно составлять половину набранных им очков.

862. 12. *Указание.* Если было x женщин и $3x$ мужчин, то

$$\frac{3x(3x - 1)}{2} \leq 1,2 \left(\frac{x(x - 1)}{2} + 3x^2 \right),$$

откуда $x \leq 3$.

863. Пусть было m мастеров и g гроссмейстеров. Тогда $m + g = n$. Как бы ни окончилась партия между двумя партнерами, суммарное число очков, набранных ими, увеличится на 1. Значит, мастера в партиях с мастерами набрали $m(m - 1)/2$ очков. Поскольку каждый мастер половину своих очков набрал в партиях с гроссмейстерами, общее число очков, набранных мастерами в партиях против гроссмейстеров, равно $m(m - 1)/2$. Точно так же оказывается, что гроссмейстеры в партиях против мастеров набрали $g(g - 1)/2$ очков. Число партий, в которых мастер играл с гроссмейстером, равно mg . Отсюда

$$\frac{m^2 - m}{2} + \frac{g^2 - g}{2} = mg,$$

т.е. $m^2 - 2mg + g^2 = m + g = n$, откуда $n = (m - g)^2$.

867. $(10x + y) \cdot 4,5 = 10y + x$, откуда $y = 8x$. *Ответ:* 18.

869. Представим данную таблицу в виде суммы двух таблиц:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Теперь ответ очевиден:

$$5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 5(0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90) = 2525.$$

870. Поскольку каждая цифра участвует в разрядах единиц, десятков и сотен по одному разу, ответ ясен:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 + 20 + 30 + \dots + 90 + 100 + 200 + 300 + \dots + 900 = 4995.$$

871. $ЧАЙ = АЙ \cdot 5$, т.е. $Ч \cdot 100 + АЙ = АЙ \cdot 5$ и $Ч \cdot 25 = АЙ$. Так как число АЙ двузначное, то Ч может быть равно только 1, 2 или 3. Каждому значению Ч соответствует определенное решение: $ЧАЙ = 125, 250$ или 375 .

872. а) Записав исходное равенство в виде $ЛИК \cdot ЛИК = 1000 \cdot БУБ + ЛИК$, вычтем из обеих частей равенства ЛИК.

Получим:

$$\text{ЛИК} \cdot \text{ЛИК} - \text{ЛИК} = 1000 \cdot \text{БУБ},$$

т.е. $\text{ЛИК} \cdot (\text{ЛИК} - 1) = 1000 \cdot \text{БУБ}$.

Числа ЛИК и ЛИК - 1 являются двумя последовательными натуральными числами. Поэтому они взаимно просты (не имеют общих делителей, кроме 1). Так как их произведение делится на $1000 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, то одно из них делится на 125, но не делится на 2, а другое делится на 8, но не делится на 5. Среди нечетных трехзначных чисел кратны 125 только 125, 375, 625 и 875. Среди соседних с ними (т.е. отличающихся на 1) чисел делятся на 8 только 376 и 624. Проверка показывает, что первое из этих чисел годится, а второе - нет.

Получили расшифровку: $376 \cdot 376 = 141376$.

6) БАРСУК = 390625.

873. 10989.

874. $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. Поскольку $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$, получится исходное число.

878. $19941994 = 1994 \cdot 10001$; $199519951995 = 1995 \cdot 100010001$.

879. 150, 225, 375.

880. Исходное число: $400 + 10a + b$. Новое число: $100a + 10b + 4$. По условию,

$$\frac{3}{4} \cdot (400 + 10a + b) = 100a + 10b + 4,$$

откуда $10a + b = 32$, а значит, искомое число $400 + 10a + b = 432$.

Впрочем, удобнее было обозначить через x число, образованное последними двумя цифрами. Тогда

$$(400 + x) \cdot \frac{3}{4} = 10x + 4,$$

откуда $x = 32$.

881. $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$. Если квадрат числа делится на 11, то он делится и на 11^2 ; следовательно, $a + b \div 11$. Ответ: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 или 92.

884. 105263157894736842.

885. а) Например, 7125.

б) Не существует. Пусть x - зачеркиваемая цифра, n - количество остальных цифр, y - число, остающееся после зачеркивания. Тогда $x \cdot 10^n + y = 58y$, откуда $x \cdot 10^n = 57y$. В последнем равенстве правая часть делится на 19, а левая - нет.

886. 21978.

887. Самое маленькое натуральное число, сумма цифр которого 13 - число 49. Легко понять, что это число удовлетворяет условию задачи.

А никаких других чисел нет по той простой причине, что если

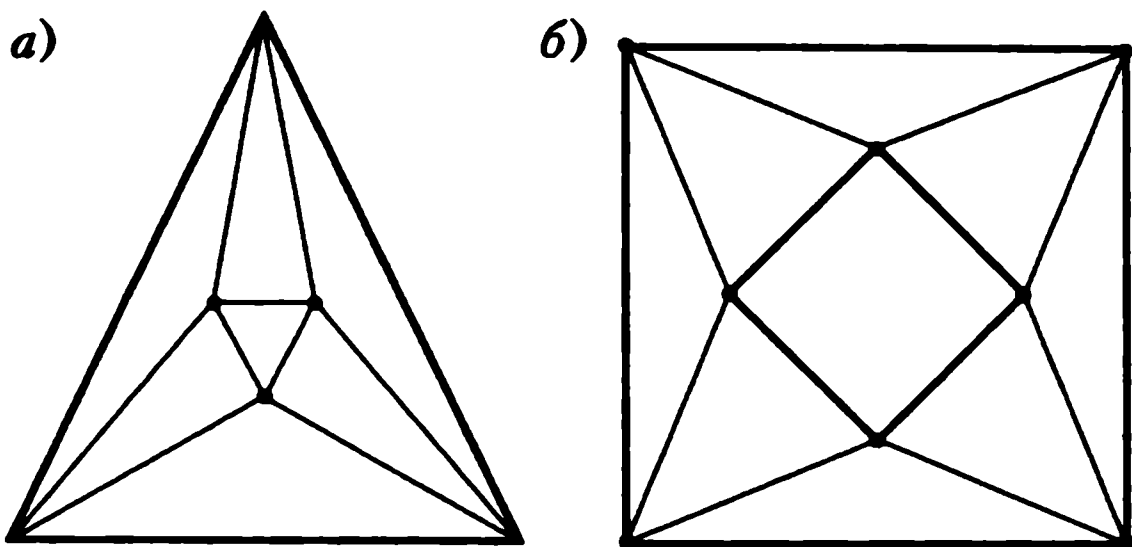


Рис. 111

расстояние x между селами больше 49 км, то на одном из столбов будет с одной стороны число 49, а с другой — число $x - 49$. Сумма цифр на этом столбе будет больше $4 + 9 = 13$, благодаря цифрам числа $x - 49$.

899. а) См. рис.111.

900. См. рис.112.

901. *Указание.* Как бы ни были расположены 6 звездочек, всегда найдутся два столбца, в которых в сумме не меньше четырех звездочек. Семь звездочек, показанные на рисунке 113, вычеркнуть нельзя.

902. Если $a + b$ делится на 3, то

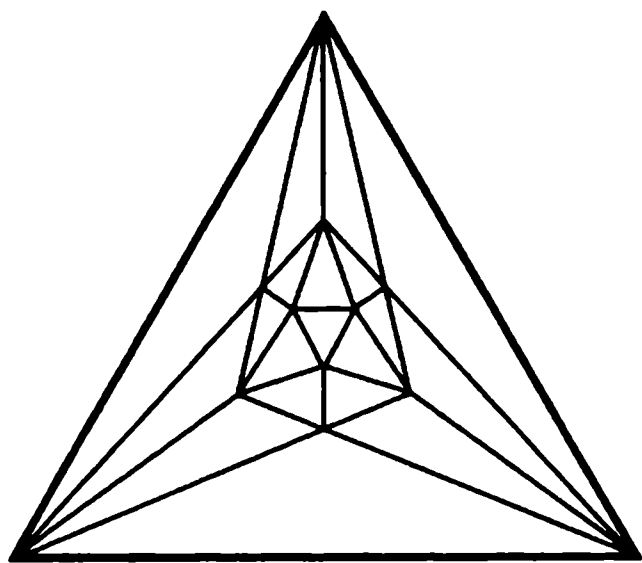


Рис. 112

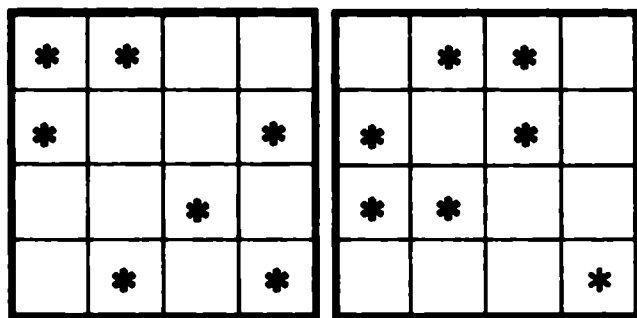


Рис. 113

$a + 7b = (a + b) + 6b$ делится на 3, значит, $a + 7b$ не простое. Поэтому третье или четвертое утверждение ложно, и, следовательно, первые два истинны. Тогда $a + b = 2b + 5 + b = 3b + 5$ не делится на 3, значит, третье утверждение ложно и, следовательно, $a + 1 = 2b + 6$ делится на b , т.е. $b = 1, 2, 3$ или 6 и, соответственно, $a = 2b + 5 = 7, 9, 11$ или 17 . *Ответ:* $b = 2, a = 9$ или $b = 6, a = 17$.

903. а) 25.04.13; б) 17.06.2345.

905. б) $203 = 7 \cdot 29 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$. Надо взять $203 - 7 - 29 = 167$ единиц.

906. Да, это 735.

907. Нет, ибо 528 делится на 11.

908. В ребусе участвуют 9 разных цифр. Если одна из них 0, то

одна из частей ребуса равна 0, а другая – не равна. Если же ни одна из цифр не равна 0, то одна из цифр равна 7, и тогда одно из произведений делится на 7, а другое – не делится. Значит, ребус решений не имеет.

909. Разложим число 864 на множители: $864 = 2^6 \cdot 3^2$.

Ответ: $32 \cdot 27$ или $18 \cdot 64$.

911. $271 \cdot 205 = 55555$.

912. Могли: $6 \cdot 6 = 12 \cdot 3$ и $15 \cdot 6 = 30 \cdot 3$.

913. Разложим 1995 на множители:

$$1995 = 5 \cdot 399 = 5 \cdot 3 \cdot 133 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19.$$

Простое число 19 не записывается одной цифрой, и потому искомое число – либо $5 \cdot 19$, либо $3 \cdot 19$, либо $7 \cdot 19$.

Ответ: $57 \cdot 5 \cdot 7 = 1995$. (Формально говоря, предложенное решение не полно: мы забыли, что если в числе есть цифры 1, то они не повлияют на произведение. Значит, мы должны были проверить и числа $3 \cdot 5 \cdot 19$, $3 \cdot 7 \cdot 19$, $5 \cdot 7 \cdot 19$. Есть и другой способ исправить нашу ошибку – с самого начала перебрать все подряд делители числа 1995. Перебор можно сократить, заметив, что если бы искомое число делилось на 5, то оно оканчивалось бы цифрой 5, а тогда произведение всех его цифр и самого этого числа делилось бы на 25, в то время как 1995 на 25 не делится.)

915. Не поленимся выписать все числа от 1 до 30:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot \\ \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30.$$

Произведение $2 \cdot 5$ равно 10. Значит, последняя цифра числа $30!$ равна 0. Числа 10, 20, 30 дадут еще три нуля, и при этом от них останется $2 \cdot 3 = 6$. Далее, $15 \cdot 6 = 90$ и $25 \cdot 4 = 100$. Это еще три нуля, и от этих множителей остается еще множитель 9.

Итак, $30!$ оканчивается на семь нулей, а перед этими нулями стоит последняя цифра произведения

$$6 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot \\ \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29.$$

917. в) Правило очень простое: *число делителей натурального числа n нечетно тогда и только тогда, когда n – точный квадрат*. Например, число 12 имеет четное число делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Они легко объединяются в пары: $1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$. Число 36 имеет нечетное число делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Они тоже объединяются в пары, только 6 при этом остается наедине с собой: $1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6^2 = 36$.

Вообще, если d – делитель числа n , т.е. $n = dd'$, где d' – целое число, то d' – тоже делитель числа n .

918. в) $(2 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (5 + 1) = 264$ делителя (считая единицу и само число).

920. а) $2 \cdot 3^6$; б) $2^2 \cdot 3^4$ или $2^4 \cdot 3^2$; в) таких чисел нет.

921. Заменяя в произведении $N = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100!$ факториалы их определениями, т.е. записав

$$1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100),$$

видим, что множитель 1 появится 100 раз, множитель 2 – 99 раз, 3 – 98 раз, и так далее вплоть до единственного множителя 100. Значит,

$$N = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot 5^{96} \cdot \dots \cdot 99^2 \cdot 100,$$

так что N можно представить в виде

$$N = a^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 100.$$

Вынося из четных чисел по двойке, получим

$$N = a^2 \cdot 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50.$$

Выходит, достаточно зачеркнуть $50!$, и произведение факториалов станет точным квадратом!

926. 123 копейки. Книга стоит более $1100/9 > 122$ копеек и менее $1600/13 < 124$ копеек.

927. Поскольку 6 карасей тяжелее 10 лещей, они тяжелее 9 лещей. Поэтому 2 карася тяжелее 3 лещей. Мы видим, что два из трех условий задачи – лишние.

928. а) Поскольку произведение трехзначного числа на однозначное не может быть пятизначным числом, этот пример не имеет решений.

б) $901 \cdot 121 = 109021$, $906 \cdot 121 = 109625$ или $987 \cdot 121 = 119427$.

930. Искомое число меньше 10^9 , но больше $2 \cdot 10^8$, поэтому основание степени меньше 32, но больше 20. Поскольку сумма цифр делится на 3, основание шестой степени тоже делится на 3. Далее, 21^6 не годится, ибо оканчивается на 1, 24^6 – оканчивается на 6, а 30^6 – на 6 нулей. Вычислив 27^6 , получаем ответ: 387420489.

931. $27^3 = 19683$.

933. Произведение $11 \cdot 90 = 990$ – число трехзначное. Значит, частное от деления больше 90. Как всякое двузначное число, оно меньше 100. Поскольку делимое делится на 5, то и частное должно делиться на 5. Следовательно, частное есть 95, а делимое равно $95 \cdot 11 = 1045$.

936. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 14 = 92$.

939. Пусть $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ – искомые числа. Сложив все десять сумм, получим 72. Так как каждое из пяти исходных чисел входит в четыре суммы, сумма исходных чисел равна $a + d + c + d + e = 72 : 4 = 18$. Сумма $a + b$ наименьших двух, очевидно, равна 0, а

наибольших $d + e = 15$. Значит, $c = 18 - 0 - 15 = 3$. В ряду сумм второе место занято, очевидно, суммой первого и третьего. Поэтому $a + c = 2$, т.е. $a = 2 - 3 = -1$. Следовательно, $b = 1$. Аналогично находим, что наибольшие два числа равны 5 и 10.

942. Может.

945. Не обязательно.

946. 66 ходов. В левой нижней клетке эта сумма равнялась 2, а в правой верхней – 200. Следовательно, коню понадобится не менее $(200 - 2)/3 = 66$ ходов. Чередую ходы на две горизонтали вправо и одну вертикаль вверх с ходами на одну горизонталь вправо и две вертикали вверх, можно перевести коня ровно за 66 ходов.

947. По определению делимости, существуют такие целые числа k и l , что $a = km$, $b = lm$. Имеем: $a + b = km + lm = (k + l)m$.

951. а) Обязательно.

г) Не обязательно. Например, число 12 делится и на 4, и на 6, но не делится на 24.

953. 1155, 3150, 4155, 6150, 7155 или 9150.

954. 9876543120.

955. 72630 или 72135.

957. 3132 или 8136.

959. 3333333777.

964. 887.

965. 9, потому что $100!$ делится на 9.

971. а) 18, 36, 54, 72 и 90; б) 9, 18, 27, 36 и 45.

972. а) (192, 384, 576), (219, 438, 657), (273, 546, 819) или (327, 654, 981). б) Нельзя. Пусть x – искомое число. Поскольку $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45 : 9$, то и $x + 2x + 5x = 8x$ делится на 9, так что $x : 3$. Первая цифра числа x равна 1, иначе число $5x$ было бы более чем четырехзначным.

974. $x = 44$, 47 или 50.

975. б) Числа x , $s(x)$ и $s(s(x))$ дают одинаковые остатки при делении на 3, поэтому $x + s(x) + s(s(x))$ делится на 3. Число 1993 не делится на 3. Значит, решений нет.

в) Поскольку $x < 1993$, то $s(x) \leq s(1989) = 27 = 27$. Значит, $s(s(x)) \leq s(19) = 10$, а $s(s(s(x))) \leq 9$. Из уравнения следует, что

$$x = 1993 - s(x) - s(s(x)) - s(s(s(x))) \geq 1993 - 27 - 10 - 9 = 1947.$$

Поскольку числа x , $s(x)$, $s(s(x))$ и $s(s(s(x)))$ дают одинаковые остатки при делении на 9, а 1993 дает остаток 4, число x должно давать остаток 1 при делении на 9. Среди чисел от 1947 до 1993 остаток 1 при делении на 9 дают 1954, 1963, 1972, 1981 и 1990. Подходит только 1963.

976. Такое число единственно, это $1494 = 83 \cdot 18$. *Указание.* Если из искомого числа вычесть его сумму цифр, то получится число, делящееся на 9 и на 82.

981. При счете десятками не хватало 2 яиц до полного десятка. Значит, оставалось 8 яиц, как и при счете дюжинами. Поэтому если отложить 8 яиц, то число оставшихся разделится как на 10, так и на 12, т.е. на 60. Среди чисел, больших 300 и меньших 400, лишь 360 делится на 60; значит, яиц было 308 или 368.

983. а) Прав. б) *Ответ:* 27721. *Указание.* НОК [11, 10, 9, 8, 7, 6] = $8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 27720$.

984. Пусть x – искомое число. Тогда:

1) при делении 100 на x в остатке получили 4, значит, 96 делится на x без остатка;

2) при делении 90 на x в остатке получили 18, поэтому 72 делится на x без остатка;

3) делитель должен быть больше остатков, следовательно, делитель больше 18;

4) числа 96 и 72 делятся на x , поэтому их разность 24 также делится на x , причем $x > 18$. Это может быть только в том случае, если $x = 24$.

985. При n , представимых в виде $5s - 3$, где s – натуральное число.

986. а) $3930 + 3980 = 7910$; б) $7693 + 7693 = 15386$ и $8653 + 8653 = 17306$; в) $145826 + 948947 = 1094773$; г) $10652 - 9067 = 1585$; д) $23674 \cdot 2 = 47348$; е) $85931 + 85931 = 171862$; ж) $18969 + 18969 = 37938$; з) $8232 \cdot 4 = 32928$; и) $56350 \cdot 3 = 169050$ или $57350 \cdot 3 = 172050$; к) $94183 \cdot 3 = 282549$; л) $29750 \cdot 3 = 89250$; м) $834970 \cdot 3 = 2504910$; о) $12607 \cdot 3 = 37821$; п) $26159 \cdot 4 = 104636$; р) $13606 \cdot 7 = 95242$; с) $15 \cdot 5 = 75$ и $16 \cdot 6 = 96$; т) $754728 + 72791 = 827519$ или $745718 + 71702 = 817420$; у) $69730 + 69730 = 139460$.

988. Обозначим количество всей травы на лугу через 1; количество травы, поедаемой одной коровой за день, – через x , а количество травы, вырастающей на лугу за сутки, – через y . Тогда

$$\begin{cases} 24 \cdot 70x = 1 + 24, \\ 60 \cdot 30x = 1 + 60y, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{7}{1600}$, $y = \frac{7}{160} - \frac{1}{24} = \frac{1}{480}$.

Если n коров съедят траву за 96 дней, то $n \cdot 96x = 1 + 96y$, т.е.

$$n = \left(1 + \frac{96}{480}\right) \cdot \frac{1600}{96} = 20.$$

989. 100 ступенек. *Указание.* Пусть на неподвижном эскалаторе x ступенек. Будем измерять скорости в «ступеньках в минуту».

Пусть $э$ – скорость эскалатора, v – скорость Миши. Тогда Миша наступит на $\frac{x}{э + v} \cdot v$ ступенек, а Боря – на $\frac{x}{э + 3v} \cdot 3v$ ступенек.

990. В полтора раза.

994. Река с одинаковой скоростью несет и пловца, и мяч. Поскольку пловец 20 минут удаляется от мяча (за счет собственной скорости), он будет догонять его тоже 20 минут.⁸ Итак, расстояние между мостами, равное 2 км, мяч проплывет (со скоростью течения реки) 40 минут, следовательно, скорость реки $2 : \frac{2}{3} = 3$ км/ч.

995. а) 2 часа. На пути от A до B катер удаляется от плота со скоростью, равной скорости катера в стоячей воде, а на пути от B до встречи с плотом катер приближается к плоту с той же скоростью. Следовательно, время катера от A до B равно времени от B до встречи с плотом и равно 2 ч.

б) 4 часа. Как мы знаем из решения пункта а), время движения катера от A до B равно 1 ч. Время движения катера от B до первой встречи с плотом также 1 ч.

По тем же соображениям время катера на путь от точки встречи с плотом до A равно его времени от A до точки, где он нагнал плот, и равно также 1 ч; значит, время катера от B до A равно 2 ч. За 1 ч по течению катер проходит весь путь от A до B , а против течения – $\frac{1}{2}$ этого пути. Следовательно, за 1 ч плот (течение) проходит $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1/4$ этого пути, а весь путь от A до B плот проплывает за 4 ч.

996. Скорость течения равна $0,5(16 - 12) = 2$ км/ч, скорость катера в стоячей воде – 14 км/ч.

998. На 2 км. Перейдем в систему отсчета, связанную с пешеходом. Расстояния и времена при этом не изменятся, зато пешехода можно будет считать неподвижным – можно даже заменить пешехода на фонарный столб. Задачу можно переформулировать так.

Велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону. В тот момент, когда велосипедист проезжал мимо фонарного столба, мотоциклист отставал от него на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, они были на расстоянии 3 км от фонарного столба. На каком расстоянии от фонарного столба был велосипедист в тот момент, когда мотоциклист поравнялся с фонарным столбом?

Эту задачу уже легко решить вообще без уравнений (подумайте,

⁸ Это легче понять, вообразив себя на плоту, плывущем по течению. В такой системе отсчета мяч и вода реки неподвижны.

во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста).

999. 18 обгонов. Представьте сначала, что пловцы плывут в одну сторону по одной дорожке, а возвращаются по другой. Затем вообразите, что они плавают по кругу (как бы отделив дорожки одну от другой канатом). Тогда первый проплывает весь круг за 22 минуты, а второй за час. Через 11 часов впервые оба пловца окажутся одновременно в исходной точке. К этому моменту один сделает 30, а другой 11 оборотов. Значит, первый проплывет на $30 - 11 = 19$ кругов больше, так что обгонов будет 18. (Чтобы понять, почему не 19, представьте себе, что один пловец проплыл два круга в то время, за которое второй проплыл один круг. Обгонов вообще не будет!)

1000. *Алгебраическое решение.* Пусть v – скорость течения. Тогда скорость ходьбы есть $\frac{3}{2}v$, а скорость бега – $3v$.

Искомое время состоит из времени t , которое рассеянный бежал назад, и времени, которое он потратил, чтобы пройти пешком то расстояние, которое пробежал.

Поскольку бежал он вдвое быстрее, чем шел, искомое время есть $t + 2t = 3t$. Рассмотрим ситуацию с момента, когда рассеянный бросил палку, до того момента, когда он встретил ее, плывущую по ручью.

Он пробежал расстояние $t \cdot 3v$, затем за 10 мин прошел расстояние $10 \cdot \frac{3}{2}v$. Палка плыла все это время, т.е. $(t + 10)$ мин, со скоростью v . Очевидно, $t \cdot 3v = 10 \cdot \frac{3}{2}v + (t + 10) \cdot v$. Сократив на v , находим $t = 12,5$. *Ответ:* 37,5 мин.

Арифметическое решение. Рассеянный удалялся от палки и приближался к шляпе со скоростью, равной $1,5 \cdot 2 - 1 = 2$ скорости течения, а приближался к палке, поймав шляпу, со скоростью, равной $1,5 + 1 = 2,5$ скорости течения. На приближение к палке рассеянный потратил 10 минут, значит, на то, чтобы догнать шляпу, ушло $(10:2) \cdot 2,5 = 12,5$ минут. К этому моменту палка плыла $10 + 12,5 = 22,5$ минуты. Рассеянный пройдет это расстояние за $22,5 : 1,5 = 15$ минут. Всего на эпопею со шляпой потрачено $22,5 + 15 = 37,5$ минут.

Задачу можно решить и с помощью графиков (рис. 114). Сделайте это самостоятельно!

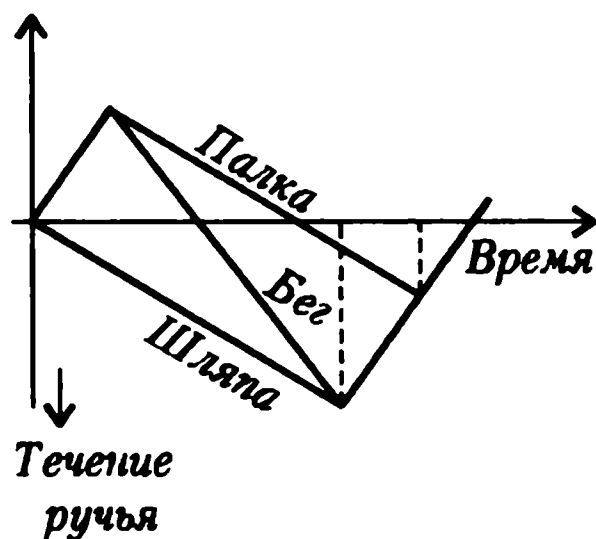


Рис. 114

Логично, не правда ли?

- 1) тех, кто мне не верил!
- 2) потеплеет?
- 3) нужно столько денег.
- 4) врач.
- 5) количество волос нечетно.
- 6) читать.
- 7) играть со мной, а я не могу?
- 8) ловил именно карасей?
- 9) свою жизнь.
- 10) Второй на 1600 дорожке.
- 11) ты его не знаешь.
- 12) останавливался во всех остальных.
- 13) какая вам разница?
- 14) жду девятерых.
- 15) Окно.
- 16) найденные.
- 17) был поближе к железной дороге.
- 18) платите только 5 рублей.
- 19) А у Васи есть.
- 20) меня в эту компанию не приглашают.
- 21) разбежаться?
- 22) с ними разговаривать.
- 23) На кухне.
- 24) поставил на твою лошадь.

Тест для шестиклассника

1. 16. 4. 50%.

5. Если бы купец купил только черное, он заплатил бы $138 \cdot 3 = 414$ рублей. Значит, синего сукна $(540 - 414) : (5 - 3) = 63$, а черного $138 - 63 = 75$ аршин.

6. Достаточно извлечь шар из урны «БЧ». Если он белый, то в ней белые шары, а черные шары – в урне «ББ». Если он черный, то в урне «БЧ» лежат черные, а в урне «ЧЧ» – белые шары.

7. За 59 минут.

8. Олимпиада Карповна выпила 11 чашек, Сосипатра Титовна –

9, Поликсена Уваровна – 7.

14. 2100010006.

15.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
встречается	1	7	3	2	1	1	1	2	1	1	раз

или

цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
встречается	1	11	2	1	1	1	1	1	1	1	раз.

Тест для семиклассника

2. Могут. Например, 9-я метка одного и 13-я другого находятся друг от друга на расстоянии 1 см, ибо $13 \cdot 25 - 9 \cdot 36 = 1$.

4. Полминуты поезд движется мимо столба, значит, полминуты поезд «съезжает» с моста, т.е. с момента, когда поезд начал въезжать на мост до момента, когда он начал съезжать с него, прошло полминуты. Итак, за $1/2$ минуты поезд прошел 450 м, откуда скорость равна $450 : (1/2) = 900$ м/мин = 54 км/ч. Умножая скорость на $1/2$ минуты, находим длину поезда. *Ответ:* 54 км/ч; 500 м.

5. 13.

6. Чтобы не запутаться, обозначим возрасты Коли, Оли и Поли буквами K , O и P соответственно. Поскольку Коля был молод, как Оля, $K - O$ лет назад, а тетушка Поля была в возрасте Коли $P - K$ лет назад, условие задачи можно переформулировать следующим образом: $K - O$ лет назад Поле было на 1 год меньше, чем $K + O$ лет. Сколько лет было Коле $P - K$ лет назад?

Теперь условие задачи можно записать в виде уравнения

$$P - (K - O) = K + O - 1,$$

и искомая величина есть $K - (P - K)$.

7. На 24 нуля. Нули в конце появляются потому, что число делится на двойки и пятерки ($10 = 2 \cdot 5$). Понятно, что в разложении $100!$ на простые множители двоек больше, чем пятерок, поэтому нулей на конце $100!$ столько, на какую степень пятерки делится это число.

Среди чисел от 1 до 100 на 5 делятся 5, 10, 15, ..., 100 – всего 20 чисел. Четыре из них (25, 50, 75 и 100) делятся на $25 = 5^2$. На 125 (т.е. на 5^3) уже не делится ни одно число от 1 до 100. Поэтому максимальная степень пятерки, на которую делится $100!$, есть 24. Значит, $100!$ оканчивается на 24 нуля.

Чтобы совсем прояснить ситуацию, замечу, что десятичная запись числа $2001!$ оканчивается на

$$\left[\frac{2001}{5} \right] + \left[\frac{2001}{25} \right] + \left[\frac{2001}{125} \right] + \left[\frac{2001}{625} \right] = 400 + 80 + 16 + 3 = 499$$

нулей (здесь $[a]$ – целая часть числа a).

8. Если два числа отличаются на 1, то они разной четности. Поэтому четность количества арбузов в корзинах чередуется. В половине корзин будет четное, а в половине – нечетное число арбузов. Но сумма десяти четных и десяти нечетных чисел обязательно четна и не может равняться числу 99.

10. Рассмотрите последовательность

$$a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b$$

и запишите неравенства $a + b + c > 0$, $7a + 7b + 7c < 0$. Пример: $a + b = -7$, $c = 8$.

12. За НОК(10, 14) = 70 дней Ерема выпил бы 7, а Емеля – 5 бочек. Одну бочку они выпьют в $7 + 5 = 12$ раз быстрее.

Можно решать и другим способом: Ерема выпивает $1/10$ бочки в день, а Емеля – $1/14$ бочки в день. Стало быть, бочку они вдвоем

выпьют за $1 : \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{14} \right) = \frac{140}{24} = 5 \frac{20}{24}$ дня, т.е. за 5 дней и 20 часов.

13. а) Возьмем два карандаша разной длины. Если они разного цвета, то условие выполнено. Если одинаково, возьмем третий карандаш другого цвета. Он отличается по длине хотя бы от одного из первых двух карандашей.

б) Не всегда. Например, в магазине могут быть зеленые платья трех разных фасонов и для одного из этих фасонов – еще два платья этого фасона и некоторых двух разных цветов, отличных от зеленого.

15. 49, ибо каждый бой уменьшает количество участников на 1.

16. В начале был один кусок, в конце стало $5 \cdot 8 = 40$ кусков. Каждый разлом увеличивает количество кусков на 1. *Ответ:* $40 - 1 = 39$.

17. а) $1 : (1 - 0,2) = 1,25$. *Ответ:* на 25%.

18. *Первый способ.* Если разбойники делили x рублей, то первому досталось $100 + \frac{x - 100}{10}$, а второму

$$200 + \frac{x - 200 - \left(100 + \frac{x - 100}{10} \right)}{10}.$$

Приравняв эти доли, найдем $x = 8100$, откуда $100 + (x - 100)/10 = 900$.

Второй способ менее стандартен, но быстрее приводит к цели и очень красив. (Не зря эту задачу приписывают Леонарду Эйлеру!) Начнем с конца: n -й разбойник получил $100n$ рублей. Предпоследний получил $100(n - 1)$ и десятую часть остатка, так что «остаток» – 1000 рублей. Значит, последний получил 900 рублей, $n = 9$.

19. Кувшин молока заменим на 36 фиников, а хлеб – на 48 фиников (ибо 3 хлеба стоят столько же, сколько 4 кувшина молока, т.е. столько же, сколько 144 финика). Прибавив 6 фиников третьего араба, видим, что у всех вместе $36 + 48 + 6 = 90$ фиников, т.е. на долю каждого приходится 30 фиников.

Значит, первый должен дополучить за $36 - 30 = 6$ фиников, а второй за $48 - 30 = 18$ фиников. Иначе говоря, второй должен получить втрое больше первого. *Ответ:* 5 и 15.

20. Выпишем разложения 36 на три множителя:

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4. \end{aligned}$$

Суммы множителей этих разложений равны, соответственно, 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10.

Зная число окон, милиционер не мог установить возрасты лишь в ситуации $2 \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6$. Если в семье есть старший сын, вариант $1 \cdot 6 \cdot 6$ отпадает.

Ответ: 2, 2, 9.

21. Два встречных эскалатора образуют движущееся с постоянной скоростью u кольцо, относительно которого шапка неподвижна, а соперники бегут с одинаковыми скоростями v . Каждый должен пробежать полкольца, поэтому шапку схватят *одновременно*.

Если $v < 2u$, то шапка успеет соскользнуть с эскалатора и первым к ней подбежит Хитрец.

23. Разбив квадрат на n^2 квадратиков, видим, что в него можно вписать n^2 не налегающих друг на друга кругов радиуса $\frac{1}{2n}$.

25. По озеру быстрее. Пусть скорость парохода равна v , скорость течения u . Если $v \leq u$, пароход вообще не выплывет против течения;

если же $v > u > 0$, то все дело в неравенстве $\frac{s}{u+v} + \frac{s}{v-u} > \frac{2s}{v}$.

26. 35 суток.

27. Пусть до встречи автомобили ехали t часов. Отношение участков пути $\frac{t}{16} = \frac{25}{t}$ откуда $t = 20$.

28. За 10 минут машина проходит путь, равный двойному расстоянию от дома до места встречи инженера с машиной. Значит, от дома до места встречи машина идет 5 минут.

На месте встречи машина была за 5 минут до времени обычного выхода инженера из дома, значит, от дома до места встречи инженер шел $60 - 5 = 55$ мин. Следовательно, скорость инженера в $55 : 5 = 11$ раз меньше скорости машины.

30. Северный полюс и точки параллелей, расположенных в 10 км к северу от параллелей длины $10/n$ возле Южного полюса, где n — натуральное число.

31. а) $n^2 - n = n(n-1)$. Одно из двух последовательных целых чисел четно. б) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$. Одно из трех последовательных чисел делится на 3. в) $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n$.

33. 24029, 5471 и 5480. Единственная пятая степень целого числа, заключенная в промежутке от 35000 до 70000, — это 9^5 .

34. Если бы камни увезли, то на какую-то трехтонку положили бы 8 камней. Но даже 8 самых легких камней весят

$$370 + 372 + \dots + 364 = (370 + 384) + (372 + 382) + (374 + 380) + \\ + (376 + 378) = 4 \cdot 754 = 3016 > 3000.$$

35. 5 трехтонок. Покажем сначала, что 4 трехтонок может не хватить. Возьмем 13 одинаковых ящиков весом по 10/13 тонны. Тогда в одну трехтонку мы не сможем поместить больше трех ящиков, а в четыре – больше 12 ящиков.

Докажем теперь, что 5 трехтонок всегда хватает. Действительно, в каждую трехтонку мы можем погрузить не меньше двух тонн груза (если погружено меньше двух тонн, можно добавить еще ящик). Тогда в 5 трехтонок можно погрузить не меньше 10 тонн.

Можно решить и более общую задачу. Представьте, что несколько ящиков весят вместе T тонн, причем каждый из них весит не более 1 тонны. Какого наименьшего количества p -тонок ($p > 1$) заведомо достаточно, чтобы увезти за один раз весь этот груз?

Пусть $\gamma = \frac{p}{[p] + 1}$, где $[p]$ – целая часть числа p . Тогда ответ – это наименьшее целое число n , большее или равное $\frac{T - \gamma}{p - \gamma}$.

Чтобы доказать, что меньшего количества машин может не хватить, достаточно все грузы взять равными (и несколько большими γ).

Загружать n ящиков можно в порядке убывания их масс. Для доказательства удобно использовать следующую лемму: если имеется несколько ящиков общей массой больше p тонн (каждый – не больше 1), то можно загрузить на p -тонку больше $p - \gamma$ тонн. В задаче $p = 3$, $T = 10$, $\gamma = 3/4$; из леммы следует, что на одну

трехтонку можно загрузить больше $2\frac{1}{4}$ тонны, а весь груз, 10 тонн, как мы знаем, можно увезти на 5 трехтонках; это как раз наименьшее

целое число, большее или равное $\frac{T - \gamma}{p - \gamma} = \frac{37}{9}$.

36. Две остальные суммы равны 12 и 16, а сами числа равны либо $-1, 2, 6$ и 10 , либо $-3/2, 5/2, 13/2$ и $19/2$.

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25
30	29	28	27	26
31	32	33	34	35
40	39	38	37	36

37. Рассмотрите стоящего в одной шеренге с самым низким из высоких и в одном ряду с самым высоким из низких.

38. а) Расставьте числа в таблицу из m строк и n столбцов «змейкой», т.е. так, как это сделано для $m = 8$ и $n = 5$.

б) Сумма первых mn натуральных чисел равна $mn(mn + 1)/2$. Частное от деления на n равно $m(mn + 1)/2$, а это число не целое.

в) Пусть $n = 2k + 1$. Нетрудно рас-

пределить первые $3n = 6k + 3$ натуральных чисел на n групп по три числа в каждой так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми:

1	2	...	$k + 1$	$k + 2$...	$2k + 1$
$3k + 2$	$3k + 3$...	$4k + 2$	$2k + 2$...	$3k + 1$
$6k + 3$	$6k + 1$...	$4k + 3$	$6k + 2$...	$4k + 4$

Осталось вспомнить змейку из решения пункта а) (рис.115).
Например, для $m = 7$ и $n = 9$ имеем:

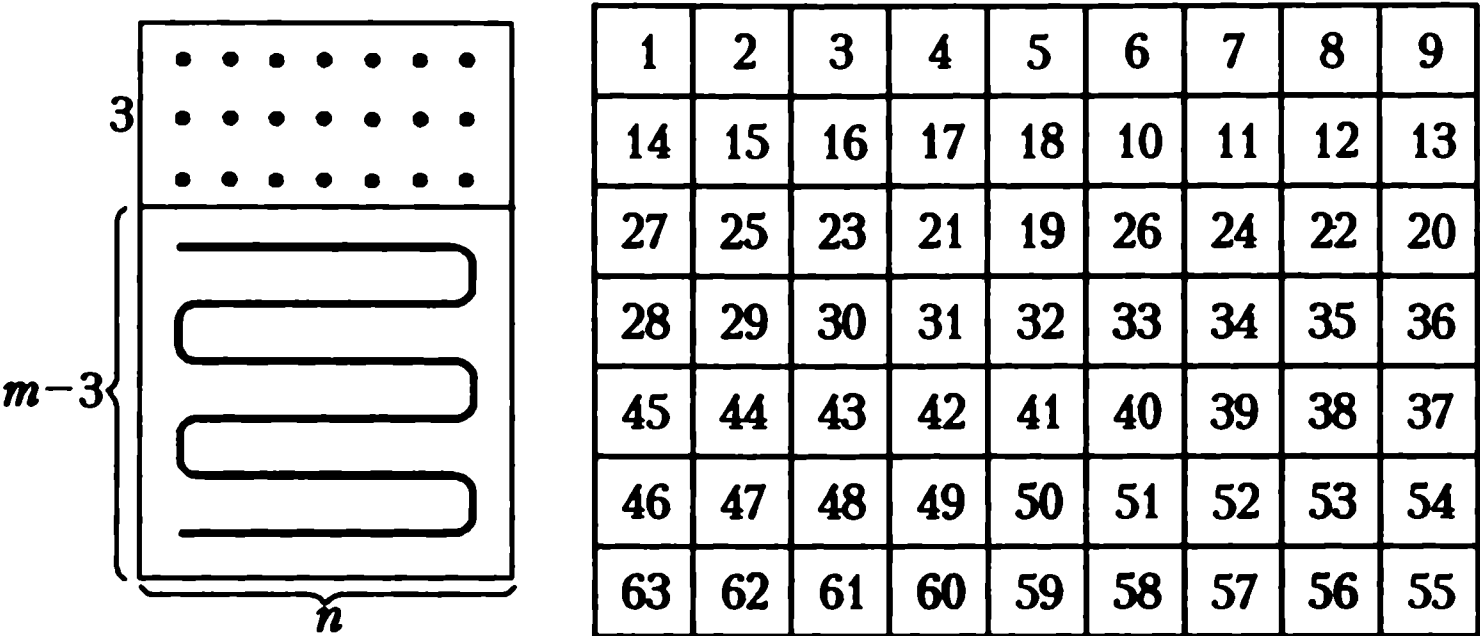


Рис. 115

41. Выигрывает первый игрок. Он может первым ходом положить пятак в центр стола, а затем на каждый ход второго игрока отвечать симметрично относительно центра стола.

45. Докажите, что он сделал столько же ходов с белого поля на белое, сколько с черного на черное.

46. Рассмотрите 2-ю, 4-ю, 6-ю и 8-ю горизонтали и вертикали а, с, е, g.

47. Докажем, что на доске не может быть написано более одного положительного числа. Пусть M — наибольшее положительное из написанных на доске чисел, а m — некоторое другое написанное на доске положительное число. По условию задачи, на доске должно быть написано и число $m + M$; но $M + m > M$. Аналогично можно доказать, что на доске не может быть написано более одного отрицательного числа. Итак, было написано одно, два или три числа; например, $\{0\}$, $\{0,1\}$ или $\{-1,0,1\}$.

48. Допустим, что никакая ладья не бьет никакую другую. Тогда на каждой вертикали стоит по одной ладье. Значит, в вертикальных рядах с нечетными номерами — а таких вертикальных рядов 6 — стоит 6 ладей. Эти 6 ладей стоят в пяти горизонтальных рядах с четными номерами и, следовательно, в каком-то горизонтальном ряду ладьи бьют одна другую.

49. 2 и 6.

50. Поскольку по крайней мере две стороны основного квадрата граничат только с единичными квадратиками, то длина a стороны основного квадрата — натуральное число. Пусть искомая сторона равна x . Тогда $a^2 = 35 + x^2$, откуда $35 = (a - x)(a + x)$. Число 35 разлагается в произведение натуральных множителей лишь двумя способами: $1 \cdot 35$ и $5 \cdot 7$. В первом случае $a - x = 1$ и $a + x = 35$, откуда $x = 17$ и $a = 18$. Во втором случае $a - x = 5$ и $a + x = 7$, откуда $x = 1$ и $a = 6$. По условию задачи, $x > 1$. Значит, подходит только $x = 17$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Е.И. Игнатьев*. В царстве смекалки.
2. *Б.А. Кордемский*. Математическая смекалка.
3. *Я.И. Перельман*. Живая математика, Занимательная арифметика, Занимательная геометрия, Занимательная алгебра.
4. Энциклопедический словарь юного математика. *Составитель А.П. Савин*.
5. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. — М.: Аванта+, 1999.

Великолепно иллюстрированная энциклопедия, самая полная из существующих на сегодняшний день.

6. *И.Ф. Шарыгин, Л.Н. Ерганжиева*. Наглядная геометрия — М.: МИРОС, 1995.

7. *С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин*. Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.

8. *В.О. Бугаенко*. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. — М.: МЦНМО, ЧеРо, 1998.

В книге собраны задачи конкурсов по математике турниров им. Ломоносова за двадцать лет с 1978 по 1997 годы. Ко всем задачам даны ответы и полные решения.

9. *И.В. Яценко*. Приглашение на математический праздник. — М.: МЦНМО, ЧеРо, 1998.

В книге собраны задачи математических олимпиад для 6—7 классов, проводимых в МГУ ежегодно, начиная с 1990 года.

10. Сайт Малого мехмата <http://mmmf.math.msu.su>

На этом сайте можно найти примерно треть задач книги «Математический праздник» с цветными иллюстрациями и более подробными указаниями или решениями.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА	3
ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА	4
АРИФМЕТИКА И НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ	7
1. «Метод Прокруста»	7
2. Было три яблока... ..	8
3. Переправы	9
4. Сбежали цифры	10
5. Нехватки и избытки	12
6. Чем отличается овца от курицы?	12
7. Шутки	14
8. Сын отца профессора	15
9. Сколько надо взять?	17
10. Перекладывания спичек	18
11. Принцип Дирихле	20
12. Разность некоторых двух из $n + 1$ целых чисел кратна n	22
13. Всякая палка о двух концах	23
14. Двенадцать стульев	25
15. Устный счет	25
16. Разрезания	27
17. Обратный ход	29
18. Положите три спички	31
19. Развертки многогранников	32
20. Расстановки скобок и знаков	38
21. Один сапфир и два топаза... ..	39
22. Наибольшее число, все цифры которого... ..	41
23. При составлении расписания... ..	42
24. Книга стоит рубль и половину своей стоимости	43
24. Логика	44
26. Замостите плоскость!	46
27. Деревянный куб покрасили и распилили... ..	47
28. ... цифра десятков больше цифры единиц?	48
29. Сколько страниц в книге?	49
30. Встретились три охотника... ..	49
31. Поставьте знаки сложения... ..	49
32. Дроби	50
33. Ряд Фарея	52
34. Свойства арифметических действий	54
35. Папирус Ринда	56
36. Полпути вдвое медленнее – потратим то же время	58
37. Дурацкие вопросы	59
38. Вычисления	62

39. Переливания	65
40. Прямоугольник составлен из квадратов	66
41. Остров рыцарей и лжецов	68
40. Составление уравнений	71
43. Повороты	74
44. Полдня артель косила большой луг	75
45. Проценты	78
46. Перебор	81
47. Ребусы	85
48. Комбинаторика	86
49. Факториал	88
50. Включения – исключения	89
51. Возрасты	90
52. Гонки	94
53. «Совместная трапеза»	98
54. Мяжя Дяма	100
55. Четность	101
56. Чередование	104
57. Разбиение на пары	107
58. Черно-белые задачи	108
59. Эйлеровы пути	110
60. Инварианты	112
61. Подсчет двумя способами	113
62. Сумма и среднее арифметическое	115
63. Средняя скорость	119
64. Последняя цифра	121
65. Остатки	122
66. Периодичность остатков	124
67. Арифметические прогрессии	125
68. Примеры и конструкции	127
69. Сложим первое с последним, второе с предпоследним... ..	130
70. В жаркий летний день... ..	133
71. Индукция	136
72. Обходы	138
73. Деревья	138
74. О пользе схем	141
75. В спортклубе тренируются 100 толстяков	142
76. Быстрое возведение в квадрат	143
77. Умножение «столбиком»	144
78. Игры	145
79. Выигрышные и проигрышные позиции	146
80. Симметрия	149
81. Калитка Эдисона	150
82. Что такое граф?	152
83. Степени вершин графа	153
84. Турниры	155
85. Десятичная система счисления	156
86. Какое это число?	158
87. Системы счисления	160
88. Двоичная система счисления	164

89. Расположите на плоскости	165
90. Разложение на множители	166
91. Количество делителей	167
92. Неравенства	169
93. Делимость	171
94. Признаки делимости	172
95. Признак делимости на 9	173
96. Признак делимости на 11	176
97. Когда до полного числа десятков... ..	177
98. И снова ребусы	178
99. На дне озера бьют ключи	179
100. Относительное движение	180
ПАРАДОКСЫ И СОФИЗМЫ	182
ЛОГИЧНО, НЕ ПРАВДА ЛИ?	187
АРБУЗНАЯ ПОШЛИНА	190
СЕЗАМ, ОТКРОЙСЯ!	193
ТЕСТ ДЛЯ ШЕСТИКЛАССНИКА	198
ТЕСТ ДЛЯ СЕМИКЛАССНИКА	200
ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ	205
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	284

АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ СПИВАК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

Библиотечка «Квант»

Выпуск 88

Научный редактор *В.М.Тихомиров*

Редактор *А.Ю.Котова*

Художник *А.Е.Пацхверия*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 55

Подписано к печати 06.01.04. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.

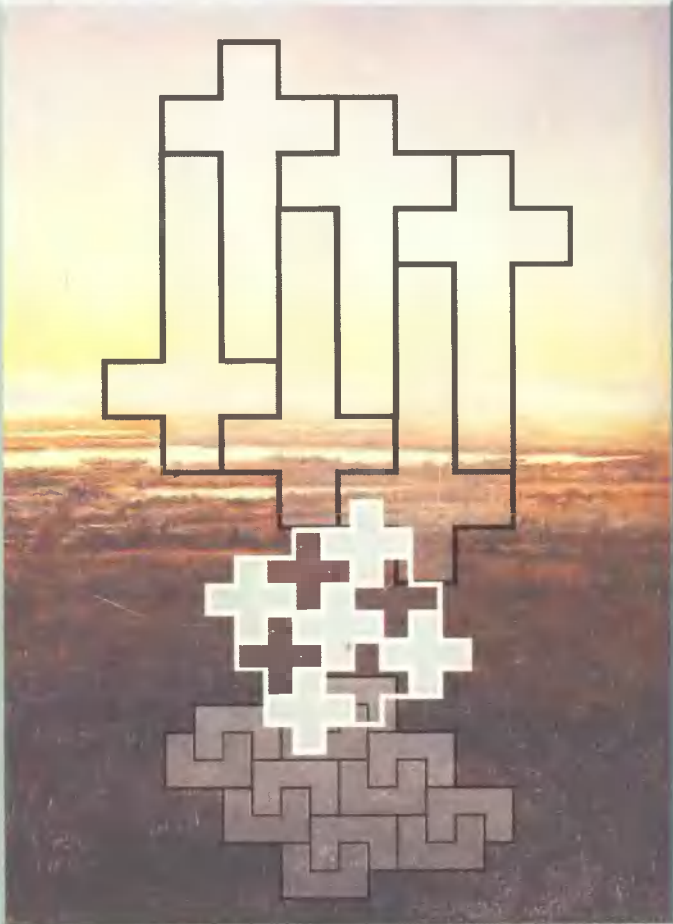
Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 9 печ. л.

Тираж 5000 экз. Заказ 203

117296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»



Библиотечка КВАНТ



ВЫПУСК

88